Modulazione FM

Si richiede una pulsazione che vari in modo proporzionale all'ampiezza della modulante $v_m(t)$ quindi:

Pulsazione istantanea

$$\omega_{FM}(t) = \omega_p + k \cdot v_m(t) = \omega_p + k \cdot A_m cos(\omega_m t) \quad k = \textit{sensibilità del modulatore}$$

Frequenza istantanea

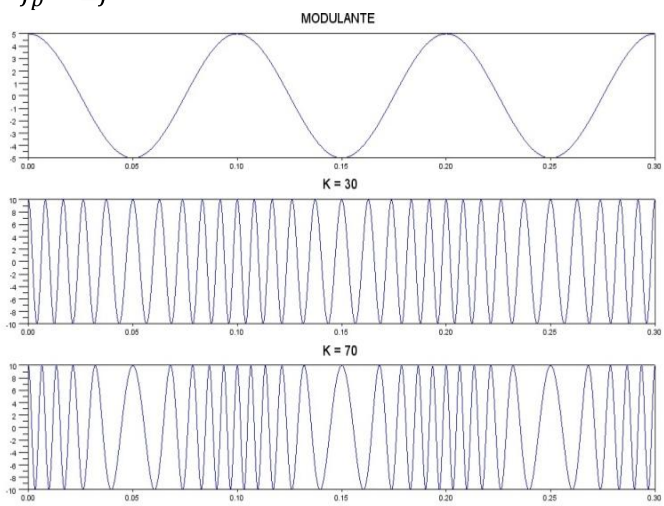
$$f_{FM}(t) = \frac{\omega_{FM}(t)}{2\pi} = \frac{\omega_p + kA_m cos(\omega_m t)}{2\pi} = \frac{\omega_p}{2\pi} + \frac{kA_m cos(\omega_m t)}{2\pi} =$$

$$= f_p + \frac{kA_m}{2\pi} cos(\omega_m t)$$

Deviazione di frequenza

$$\Delta f \triangleq \pm \frac{kA_m}{2\pi} \xrightarrow{intervallo\ di\ frequenze} \left| \begin{array}{l} f_{FM\ max} = f_p + \Delta f \\ f_{FM\ min} = f_p - \Delta f \end{array} \right.$$

$$f_{FM}(t) = f_p + \Delta f \cdot cos(\omega_m t)$$



Modulata

$$v_{FM}(t) = A_p cos[\alpha(t)]$$

Calcolo fase istantanea $\alpha(t)$

$$\begin{cases} \alpha = \omega_{FM} \cdot t \ \leftarrow se\ \omega_{FM} = cost. \\ \alpha(t) = \int_0^t \omega_{FM}(t)dt \ \leftarrow se\ \omega_{FM}(t) \neq cost. \end{cases}$$

$$\alpha(t) = \int_0^t \omega_p + \omega_{FM}(t)dt = \int_0^t \omega_p + kA_m cos(\omega_m t')dt =$$

$$= \left[\omega_p \cdot t'\right]_0^t + kA_m \left[\frac{sen(\omega_m t')}{\omega_m}\right]_0^t = \omega_p \cdot t + \frac{kA_m}{\omega_m} sen(\omega_m t)$$

$$v_{FM}(t) = A_p cos[\alpha(t)] = A_p cos\left[\omega_p \cdot t + \frac{kA_m}{\omega_m} sen(\omega_m t)\right]$$

Indice di modulazione

$$m_f \triangleq \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{\frac{kA_m}{2\pi}}{f_m} = \frac{kA_m}{2\pi \cdot f_m} = \frac{kA_m}{\omega_m}$$

$$v_{FM}(t) = A_p cos\left[\omega_p \cdot t + m_f \cdot sen(\omega_m t)\right]$$

Spettro

Ricordando che: $cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)\cdot cos(\beta) - sen(\alpha)\cdot sen(\beta)$

$$v_{FM}(t) = A_p cos\left(\underbrace{\omega_p t}_{\alpha} + \underbrace{m_f sen(\omega_m t)}_{\beta}\right) =$$

$$= A_p\left\{cos\left(\underbrace{\omega_p t}_{\alpha}\right)\cdot \mathbf{cos}\left(\underbrace{\boldsymbol{m_f sen(\omega_m t)}}_{\beta}\right) - sen\left(\underbrace{\omega_p t}_{\alpha}\right)\cdot \mathbf{sen}\left(\underbrace{\boldsymbol{m_f sen(\omega_m t)}}_{\beta}\right)\right\}$$

Utilizzando ora le funzioni di Bessel $J_n(m)$ (*funzione di ordine 'n' calcolata in 'm'*)

$$\boldsymbol{cos\left(m_f \cdot sen(\omega_m t)\right)} =$$

$$= J_0(m_f) + 2\cdot J_2(m_f)\cdot cos(2\omega_m t) + 2\cdot J_4(m_f)\cdot cos(4\omega_m t) + 2\cdot J_6(m_f)\cdot cos(6\omega_m t) + 2\cdot J_8(m_f)\cdot cos(8\omega_m t) + \ldots$$

$$\boldsymbol{sen\left(m_f \cdot sen(\omega_m t)\right)} =$$

$$= 2\cdot J_1(m_f)\cdot sen(\omega_m t) + 2\cdot J_3(m_f)\cdot sen(3\omega_m t) + 2\cdot J_5(m_f)\cdot sen(5\omega_m t) + 2\cdot J_7(m_f)\cdot sen(7\omega_m t) + \ldots$$

$$v_{FM}(t) = A_p\{cos(\omega_p t)\cdot\left[J_0(m_f) + 2J_2(m_f)cos(2\omega_m t) + 2J_4(m_f)cos(4\omega_m t) + \cdots\right] +$$

$$-sen(\omega_p t)\cdot\left[2J_1(m_f)sen(\omega_m t) + 2J_3(m_f)sen(3\omega_m t) + 2J_5(m_f)sen(5\omega_m t) + \ldots\right]\} =$$

$$= A_p J_0 cos(\omega_p t) + 2A_p J_2 cos(\omega_p t)\cdot cos(2\omega_m t) + 2A_p J_4 cos(\omega_p t)\cdot cos(4\omega_m t) + \ldots$$

$$-2A_p J_1 sen(\omega_p t)\cdot sen(\omega_m t) - 2A_p J_3 sen(\omega_p t)\cdot sen(3\omega_m t) + \ldots$$

Utilizzando gli sviluppi:

$$cos(\alpha)\cdot cos(\beta) = {}^1\!/_2\,[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$sen(\alpha)\cdot sen(\beta) = {}^1\!/_2\,[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

Sviluppo della modulata in serie di coseni

$v_{FM}(t) = A_p\cdot J_0(m_f)\cdot\left[cos(\omega_p t)\right] +$ *riga centrale a freq. f_p*

$-A_p\cdot J_1(m_f)\cdot\left[cos(\omega_p t+\omega_m t) + cos(\omega_p t-\omega_m t)\right] +$ *2 righe speculari a freq.: f_p-f_m f_p+f_m*

$+A_p\cdot J_2(m_f)\cdot\left[cos(\omega_p t+2\omega_m t) + cos(\omega_p t-2\omega_m t)\right] +$ *2 righe speculari a freq.: f_p-2f_m f_p+2f_m*

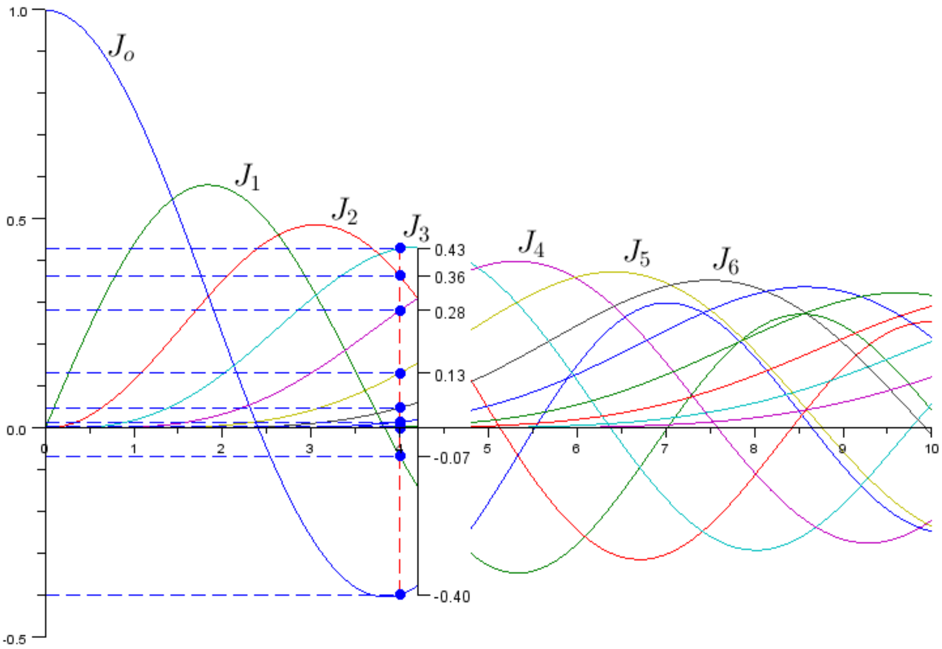
$-A_p\cdot J_3(m_f)\cdot\left[cos(\omega_p t+3\omega_m t) + cos(\omega_p t-3\omega_m t)\right] +$ *2 righe speculari a freq.: f_p-3f_m f_p+3f_m*

$+A_p\cdot J_4(m_f)\cdot\left[cos(\omega_p t+4\omega_m t) + cos(\omega_p t-4\omega_m t)\right] +$ *2 righe speculari a freq.: f_p-4f_m f_p+4f_m*

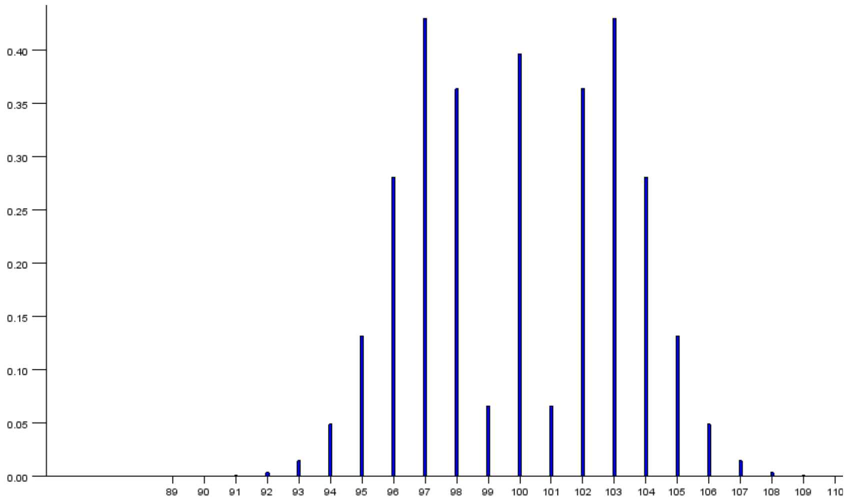
$+ \ldots$

L'ampiezza di ciascuna riga è $\boldsymbol{A_p\cdot J_n(m_f)}$

Esempio: valori delle funzioni di Bessel fino al 5° ordine in $m_f = 4$



$J_n(m_f)$	
$J_0(4)$	*- 0.3971498*
$J_1(4)$	*- 0.0660433*
$J_2(4)$	*0.3641281*
$J_3(4)$	*0.4301715*
$J_4(4)$	*0.2811291*
$J_5(4)$	*0.1320867*
$J_6(4)$	*0.0490876*
$J_7(4)$	*0.0151761*



Andamento dello spettro avendo posto: f_p*=100;* f_m*=1;* A_p*=1*

La larghezza di banda può essere calcolata mediante la formula empirica di **CARSON**

$$B = 2(\Delta f + f_m) \overset{m_f \triangleq \frac{\Delta f}{f_m}}{=} 2(m_f \cdot f_m + f_m) = 2f_m(m_f + 1)$$

$$\underbrace{=}_{nel\ es.} 2f_m(4+1) = 10f_m$$

In questo caso, dalla formula di Carson si deduce che si possono trascurare le righe di ordine superiore al 5° (*$10f_m \Rightarrow$ 5 righe a destra e 5 righe a sinistra di f_p*). Dal grafico delle funzioni i Bessel si vede che le righe dal 6° ordine [*$J_6(4)$*] in poi hanno ampiezza decrescente e <u>sicuramente</u> minore di $J_5(4) \cong 0{,}13$ (*non hanno ancora iniziato ad oscillare*).

Al crescere di m_f la banda aumenta perché i valori di $J_n(m_f)$ saranno generalmente più piccoli ma aumenterà l'ordine dopo il quale si potranno ritenere trascurabili.

La potenza associata alla modulata non dipende dalla frequenza ma solo dalla sua ampiezza, che è costante e vale A_P, quindi:

$$P_{FM} = \frac{A_P^2}{2R}$$

Oppure, sommando la potenza associata a ciascuna riga dello spettro:

$$P_{FM} = \frac{\left(A_P \cdot J_0(m_f)\right)^2}{2R} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(A_P \cdot J_n(m_f)\right)^2}{2R}$$

$$= \frac{A_p^2}{2R} J_0^2(m_f) + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_p^2}{2R} J_n^2(m_f) = \frac{A_p^2}{2R}\left[\underbrace{J_0^2(m_f) + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(m_f)}_{=1}\right] \overset{!}{=} \frac{A_p^2}{2R}$$

Si può scegliere come banda convenzionale l'intervallo di righe dello spettro alle quali è associata una determinata percentuale minima di potenza

$\frac{P_{min}}{P_{FM}} \cdot 100 \geq n\%$ *(es. 99%)*

$$\frac{\frac{A_p^2}{2R}\left[J_0^2(m_f) + 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} J_n^2(m_f)\right]}{\frac{A_P^2}{2R}} = J_0^2(m_f) + 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} J_n^2(m_f) \quad \geq n\ (es. 0.99)$$

Con i dati del precedente esempio:

		Percentuale di potenza all'aumentare delle righe considerate	
$J_0(4)^2$	0,157727964	0,15772796	15,773 %
$2 \cdot J_1(4)^2$	0,008723435	0,16645140	16,645 %
$2 \cdot J_2(4)^2$	0,265178546	0,43162995	43,163 %
$2 \cdot J_3(4)^2$	0,370095039	0,80172498	80,172 %
$2 \cdot J_4(4)^2$	0,158067142	0,95979213	95,979 %
$2 \cdot J_5(4)^2$	0,034893793	0,99468592	99,469 %
$2 \cdot J_6(4)^2$	0,004819185	0,99950510	99,951 %
$2 \cdot J_7(4)^2$	0,000460628	0,99996573	99,997 %

Quindi con N=5, cioè trascurando le righe di ordine superiore al 5°, si compie un errore minore all'1% in termini di potenza.