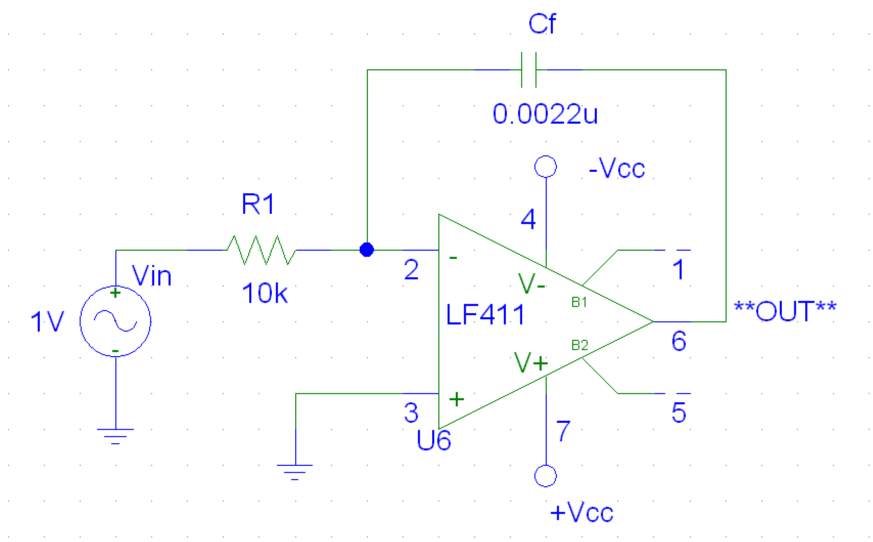
INTEGRATORE IDEALE

Lo schema dell'integratore ideale è il seguente:

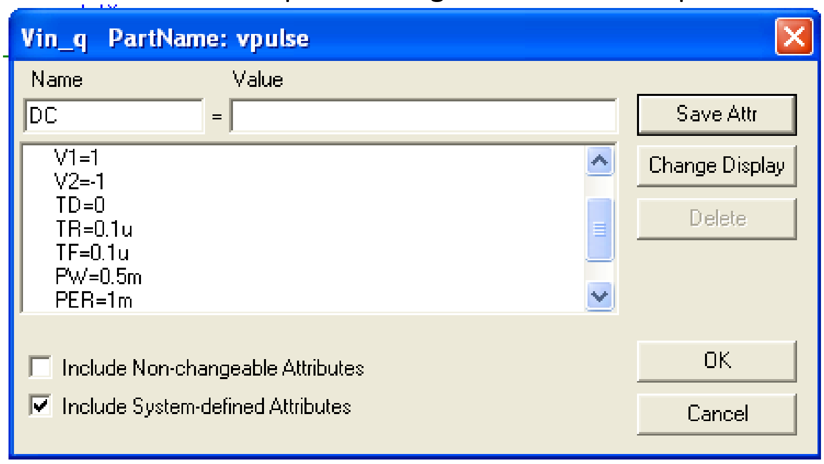


Calcolo vettoriale	Calcolo nel tempo
$\overline{I}_1 = \overline{I}_f$	$i_1(t) = i_f(t)$
$\frac{\overline{V}_1}{R_1} = \frac{\overline{V}_f}{X_f} \rightarrow \frac{\overline{V}_{in}}{R_1} = \frac{-\overline{V}_{out}}{\frac{1}{sC_f}}$	$\frac{v_1(t)}{R_1} = C_f \frac{dv_C}{dt} \rightarrow \frac{v_{in}(t)}{R_1} = C_f \frac{-dv_{out}}{dt}$ $dv_{out} = -\frac{1}{R_1 C_f} v_{in}\, dt$
$\overline{V}_{out} = -\frac{1}{sR_1C_f}\overline{V}_{in}$	$v_{out}(t) = \int_0^t -\frac{1}{R_1 C_f} v_{in}\, dt = -\frac{1}{R_1 C_f}\int_0^t v_{in}\, dt$

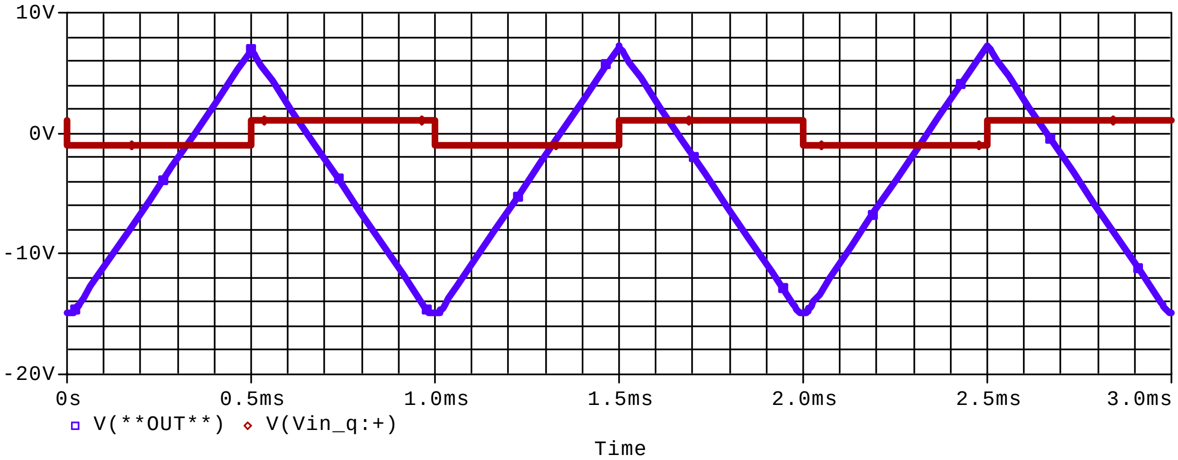
Questo circuito da quindi, in uscita, una tensione che è l'integrale (l'area) della tensione di ingresso.

Quindi se l'ingresso è un onda quadra l'uscita dovrebbe essere un onda triangolare.

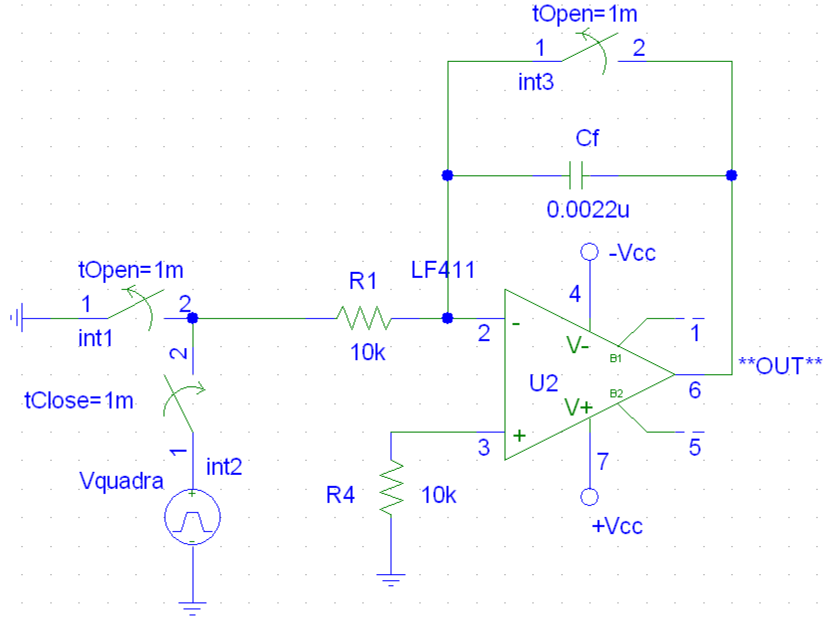
Per realizzare l'onda quadra in ingresso si usa il componente "VPULSE" impostato come segue:



L'immagine seguente mostra l'ingresso impostato sopra e l'uscita corrispondente.

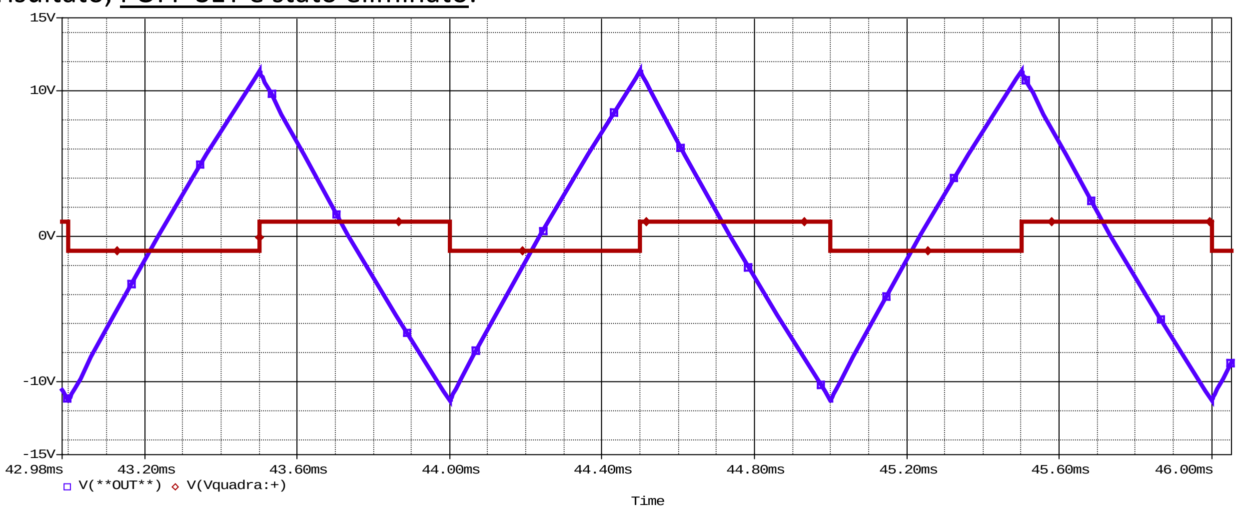


l'ingresso è l'onda quadra rossa, di periodo 1ms e tensione picco-picco pari a 2V, l'uscita è l'onda triangolare blu. In uscita è presente anche un OFF-SET di –4V, dovuto alle non corrette condizioni iniziali. Per ovviare a tale inconveniente bisogna ricorrere al seguente circuito:

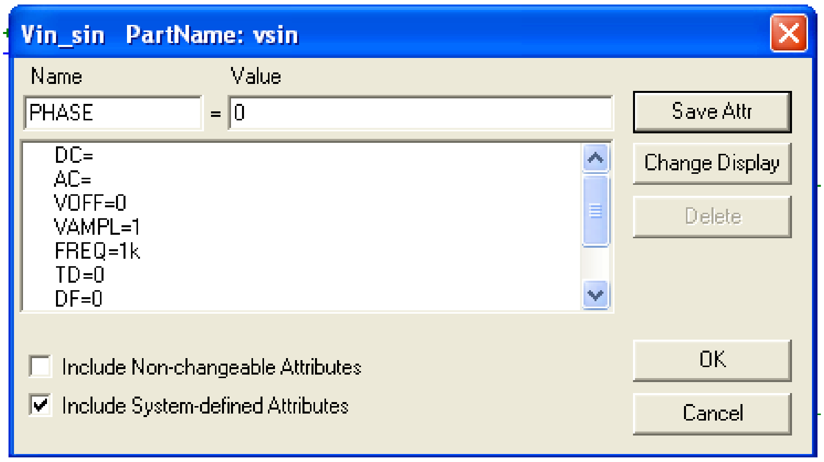


Gli interruttori 1 e 3 si aprono e l'interruttore 2 si chiude dopo 1ms; int.3 serve a scaricare il condensatore prima dell'inizio della misura, int1 ed int2 ad escludere l'alimentazione (*per la riuscita della simulazione sarebbe sufficiente il solo int3!*).

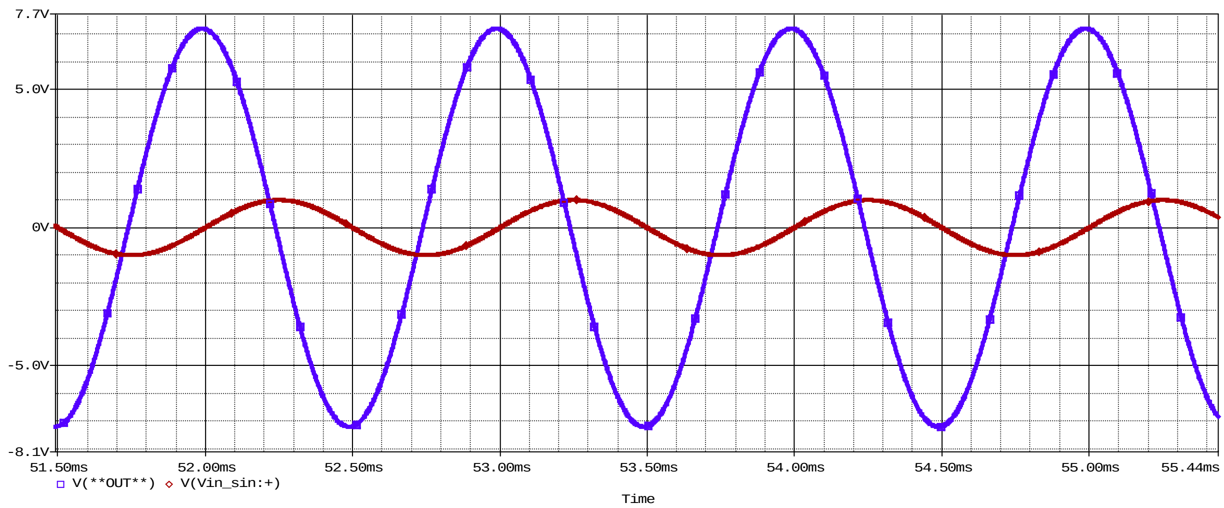
Attendendo qualche decina di millisecondi che il transitorio si esaurisca, si ottiene il seguente risultato, l'OFF-SET è stato eliminato:



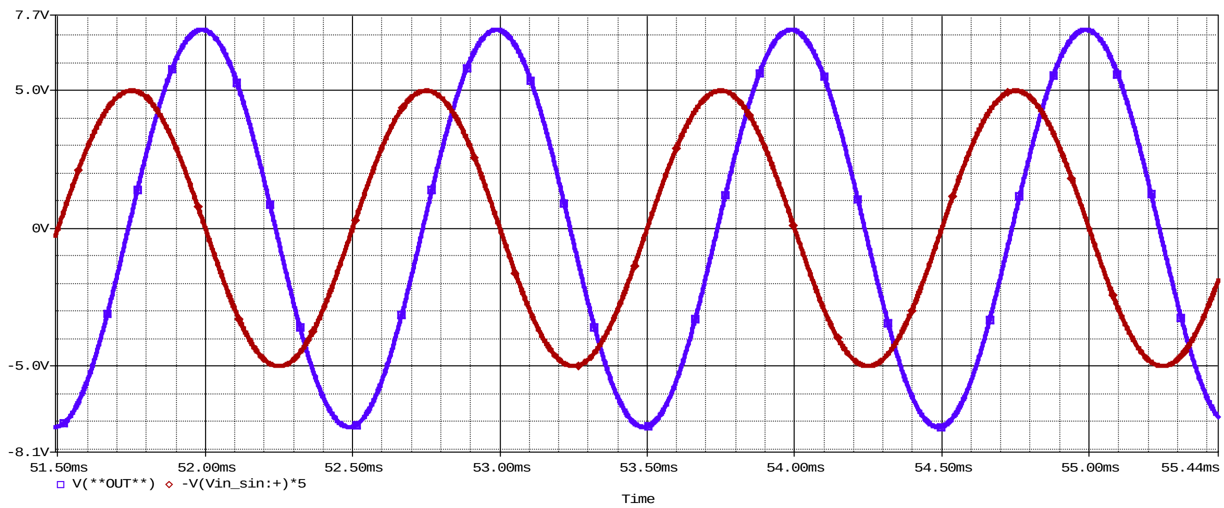
Proviamo ora a dare in ingresso un onda sinusoidale; si utilizza il componente “VSIN” impostato come segue:



Ingresso (rosso) ed uscita (blu) risultano:



per dedurre dal grafico dell’uscita quale sia l’integrale di un seno, manipolo le curve ottenute: inverto l’uscita e la amplifico e ‘zoommo’ in modo da avere il seno di ingresso che parta dall’origine. Il risultato è il seguente:



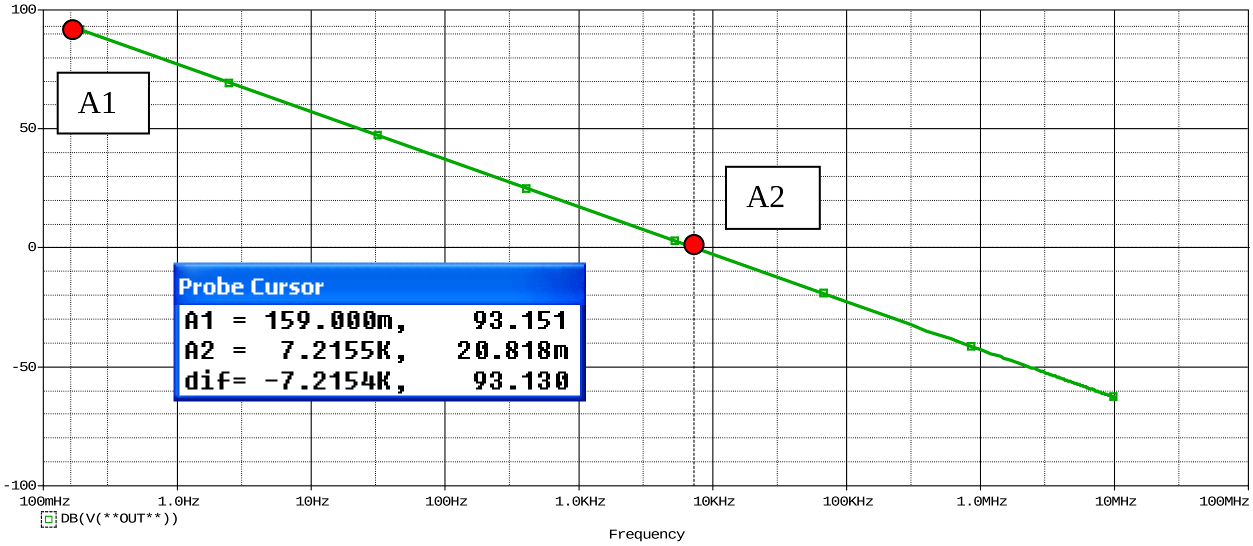
Dal grafico si deduce correttamente che l’integrale del **seno** è “**meno coseno**”.

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO INTEGRATORE IDEALE

La funzione di trasferimento dell’integratore ideale è la seguente:

$$G(s)=\frac{\overline{V}_{out}}{\overline{V}_{in}}=-\frac{1}{sR_1C_f}$$

Il diagramma di Bode del modulo è quindi una retta di pendenza -20dB/dec



che interseca l’asse delle ordinate in ω=1 →f=1/2π=159mHz (A1) in

$$20\log\left|\frac{1}{j\omega R_1C_f}\right|\overset{\omega=1}{=}20\log\frac{1}{R_1C_f}=20\log\frac{1}{10k\cdot 0{,}0022\mu}=20\log\frac{1}{10\cdot 10^{3}\cdot 0{,}0022\cdot 10^{-6}}$$

$$20\log\frac{1}{0{,}022\cdot 10^{-3}}\cong 93.15dB$$

ed interseca l’asse delle ascisse (A2) quando:

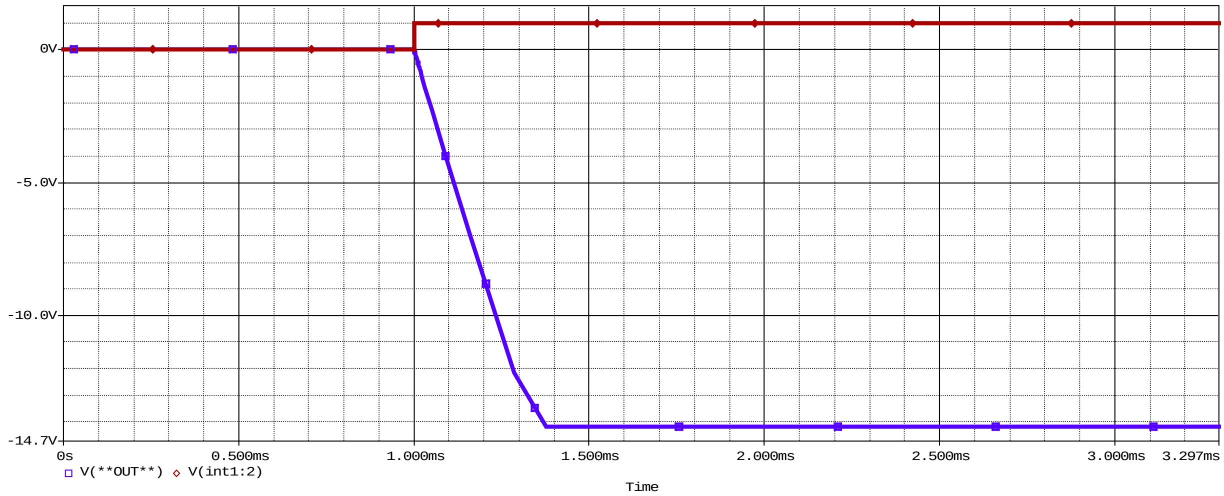
$$20\log\left|\frac{1}{j\omega R_1C_f}\right|=0\Rightarrow\log\frac{1}{\omega R_1C_f}=0\Rightarrow -\log\omega R_1C_f=0\Rightarrow\omega R_1C_f=1$$

$$\Rightarrow\omega=\frac{1}{R_1C_f}=\frac{1}{0{,}022\cdot 10^{-3}}=45454{,}5\text{rad/s}\Rightarrow \text{f}=\frac{45454{,}5}{2\pi}=7234{,}3\text{Hz}$$

PROBLEMATICHE DELL'INTEGRATORE IDEALE

L'integratore è definito ideale perché svolge la sua funzione di integratore per qualsiasi frequenza del segnale di ingresso (vedi FdT) ma, nelle applicazioni pratiche presenta una serie di problemi a causa dei quali, l'uscita non è più l'integrale dell'ingresso:

- Una tensione di ingresso, anche molto piccola, porta rapidamente l'uscita in saturazione



Ad 1ms si aprono e chiudono i vari interruttori, la tensione di ingresso, in figura, è di +1V, dopo ≅0.3÷0.4ms l'uscita è in saturazione negativa (≅-14V). La tensione di ingresso è un gradino unitario di tensione, la sua trasformata di Lapalce è come noto:

$$\int_0^{\infty} 1(t)e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$ il sistema ha FdT $G(s) = -\frac{1}{sR_1C_f}$

L'uscita si calcola dalla: $V_{out}(s) = G(s)\cdot V_{in} = -\frac{1}{sR_1C_f}\cdot\frac{1}{s} = -\frac{1}{R_1C_f}\frac{1}{s^2}$

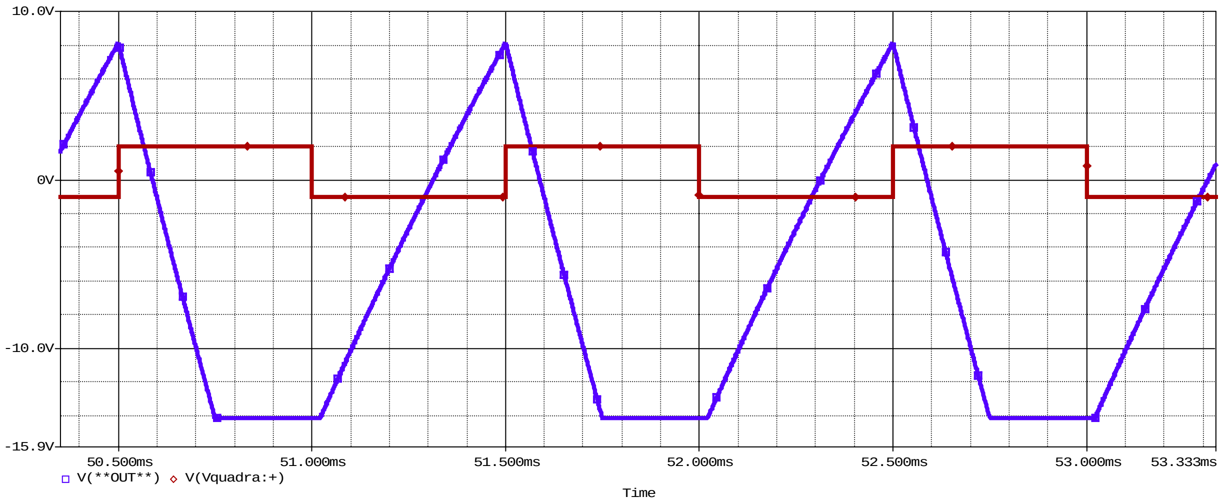
Essendo $1/s^2$ la trasformata di Laplace della rampa unitaria r(t), se ne deduce che

$$v_{out}(t) = -\frac{1}{R_1C_f}r(t) = \frac{1}{0{,}022\cdot 10^{-3}}r(t) = -45454{,}5\cdot r(t)$$

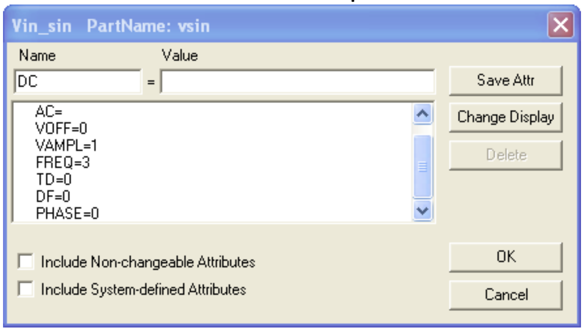
Quanto tempo impiega una retta di pendenza -45454,5 ad arrivare da 0 a -14,2?

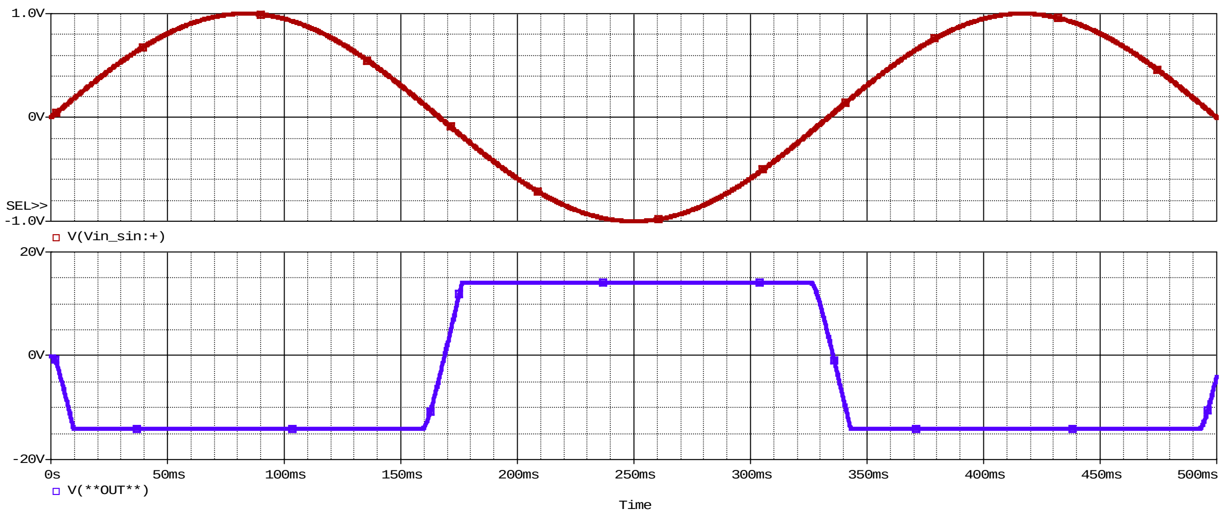
$14.2 = 45454{,}5\cdot t \Rightarrow t = \frac{14.2}{45454.5} = 0.31ms$ risultato compatibile con i valori del grafico precedente

- Satura anche se l'ingresso ha una componente continua, in quanto l'ingresso può essere visto come somma della componente continua e della componente alternata. Nella fig. seguente l'ingresso è una quadra con V_{min}=-1 e V_{max}=+2, ha quindi un off-set di +1V



- Satura anche se la frequenza è bassa:

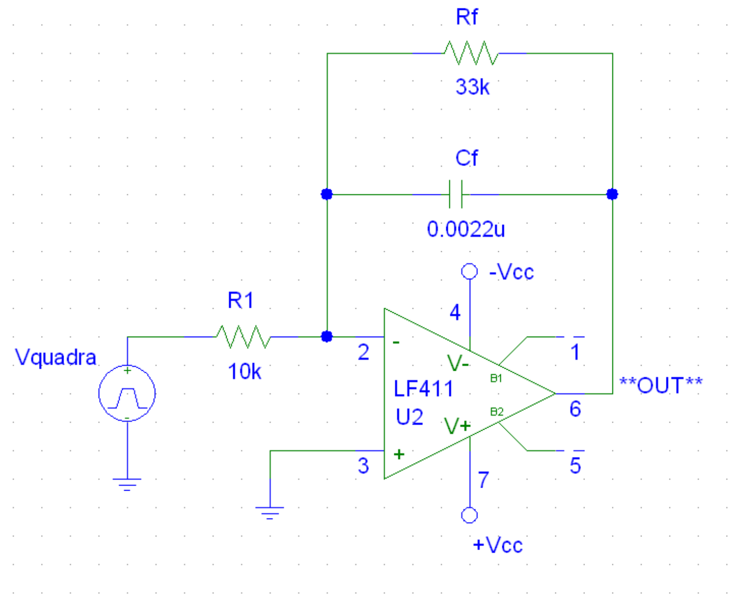




In definitiva l'integratore ideale rischia di finire in saturazione a causa di disturbi a bassa frequenza ed alla presenza di piccoli off-set indesiderati. Si ricorre allora all'integratore reale.

INTEGRATORE REALE

Lo schema è il seguente:



Calcolo della funzione di trasferimento:

$\overline{I}_1 = \overline{I}_{RC}$ la corrente su R_1 è uguale alla corrente sul parallelo $R_f//C_f$

$$\frac{\overline{V}_1}{R_1} = \frac{\overline{V}_f}{X_{//}} \rightarrow \frac{\overline{V}_{in}}{R_1} = \frac{-V_{out}}{\dfrac{R_f \dfrac{1}{sC_f}}{R_f + \dfrac{1}{sC_f}}} = \frac{-V_{out}}{\dfrac{R_f \dfrac{1}{\cancel{s}\cancel{C}_f}}{\dfrac{sR_fC_f+1}{\cancel{s}\cancel{C}_f}}} = \frac{-V_{out}(sR_fC_f+1)}{R_f}$$

$$\overline{V}_{out} = -\frac{R_f}{R_1} \cdot \frac{1}{1+sR_fC_f}\overline{V}_{in} \qquad \Rightarrow G(s) = \frac{\overline{V}_{out}}{\overline{V}_{in}} = -\frac{R_f}{R_1} \cdot \frac{1}{1+sR_fC_f}$$

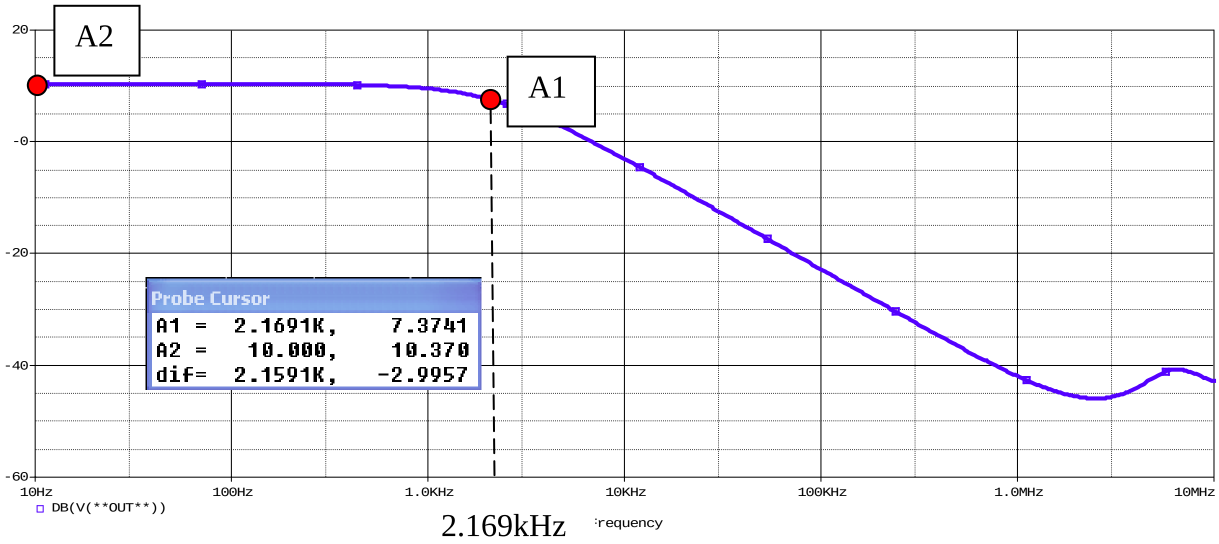
Se $sR_fC_f >> 1$ si può trascurare l'1 e la FdT diventa:

$G(s) \cong -\dfrac{\cancel{R}_f}{R_1} \cdot \dfrac{1}{s\cancel{R}_fC_f} = -\dfrac{1}{R_1} \cdot \dfrac{1}{sC_f} = -\dfrac{1}{sR_1C_f}$ cioè la stessa dell'integratore ideale.

Quindi solo se $s >> \dfrac{1}{R_fC_f} \Rightarrow f >> \dfrac{1}{2\pi \cdot R_fC_f}$ l'integratore reale funge effettivamente da integratore.

$f_t = \dfrac{1}{2\pi \cdot R_fC_f}$ è la frequenza di taglio della G.

Tramite il simulatore Pspice si ricava la funzione di trasferimento che risulta come segue:



A basse frequenze G vale:

$$\lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} -\frac{R_f}{R_1}\cdot\frac{1}{1+sR_fC_f} = -\frac{R_f}{R_1}$$

$$\Rightarrow G(s)\big|_{dB} \xrightarrow{s\to 0} 20\log\left(\frac{33k}{10k}\right) \cong 10.4dB \to G = 10^{\frac{10.4}{20}} \cong 3.3$$

A basse frequenze V_{out}=3.3V_{in}, il circuito si comporta come amplificatore, quindi anche una tensione costante, se sufficientemente bassa(V_{in} < V_{sat}/3.3 ≅ 4.2V), non causa saturazione

Alla frequenza di taglio il guadagno perde 3dB rispetto al valore massimo (10.37dB): bisogna quindi trovare la frequenza alla quale il guadagno vale 7.37dB. Tale frequenza è f_T=2,169kHz.
Analiticamente si ottiene:

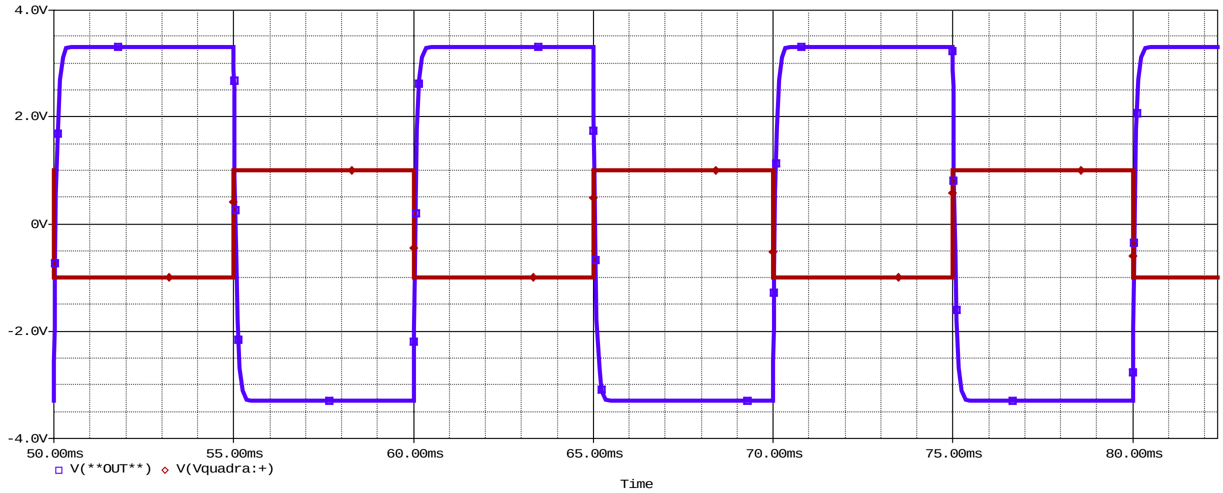
$$\omega_t = \frac{1}{R_fC_f} \Rightarrow f_t = \frac{\omega_t}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_fC_f}$$

$$f_t = \frac{1}{2\pi\cdot 33k\cdot 0{,}0022\mu} = \frac{1}{2\pi\cdot 33\cdot 10^3\cdot 0{,}0022\cdot 10^{-6}} =$$

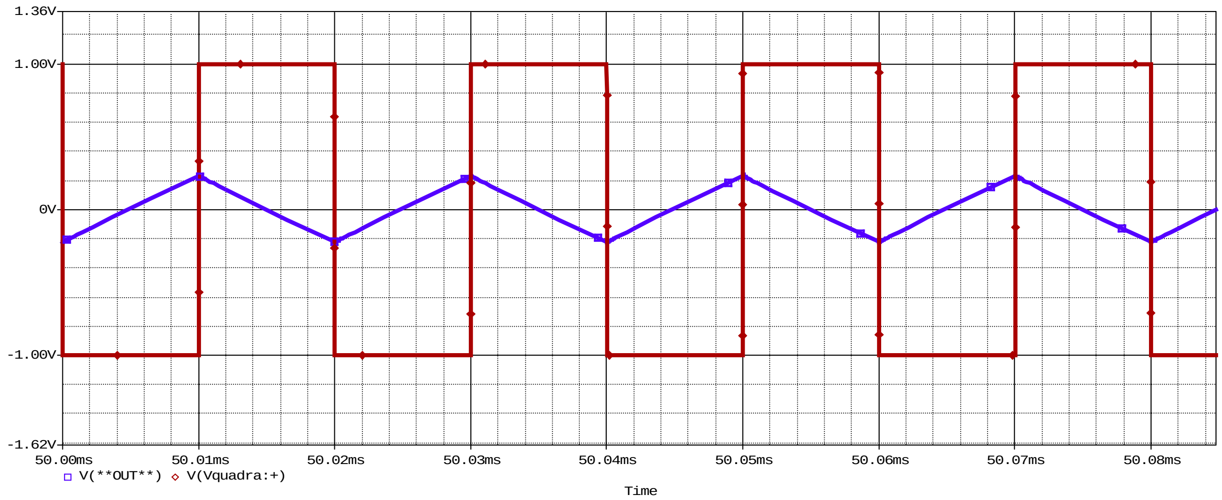
$$= \frac{1}{0{,}1452\pi 10^{-3}} = 2{,}192kHz$$

Anche dal andamento della FdT si vede che il circuito funziona da integratore solo per frequenze maggiori di f_T.
Si eseguirà ora una simulazione a frequenza f_1=100Hz (< di f_T) ed una a frequenza f_2=50kHz (> di f_T).

1. Simulazione a frequenza f_1=100Hz



2. Simulazione a frequenza f_2=50kHz



Dai 2 precedenti grafici si ottiene la conferma che a basse frequenze il circuito non si comporta da integratore mentre ad alte frequenze effettivamente integra.