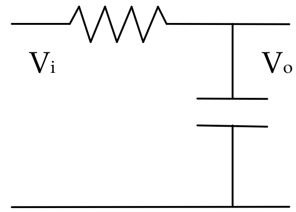
Calcolo dell'uscita del circuito di figura:

$$\overline{V}_o = \frac{\overline{X}_C}{R+\overline{X}_C}\overline{V}_i = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}\overline{V}_i = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{j\omega RC+1}{j\omega C}}\overline{V}_i = \frac{1}{1+j\omega RC}\overline{V}_i$$



Si definisce **Funzione di Trasferimento** il rapporto tra Uscita ed Ingresso:

[1] $$FdT = G(j\omega) = \frac{\overline{V}_o}{\overline{V}_i} = \frac{1}{1+j\omega RC} \Rightarrow \quad \begin{cases} |G| = \dfrac{|V_o|}{|V_i|} \\ \angle G = \angle V_o - \angle V_i \end{cases}$$

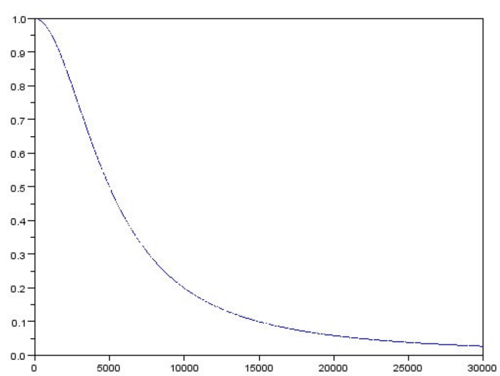
$$\Rightarrow \begin{cases} |V_o| = |G| \cdot |V_i| \\ \angle V_o = \angle V_i + \angle G \end{cases}$$

MODULO della F. di T.:

[2] $$\boxed{|G(j\omega)| =} \frac{|1|}{|1+j\omega RC|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}}$$

Se $\omega = 0 \Rightarrow \left(1+\omega^2 R^2 C^2\right) = 1$ $\qquad |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$

Se $\omega \to \infty \Rightarrow \left(1+\omega^2 R^2 C^2\right) \to \infty$ $\qquad |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\infty}} = 0$



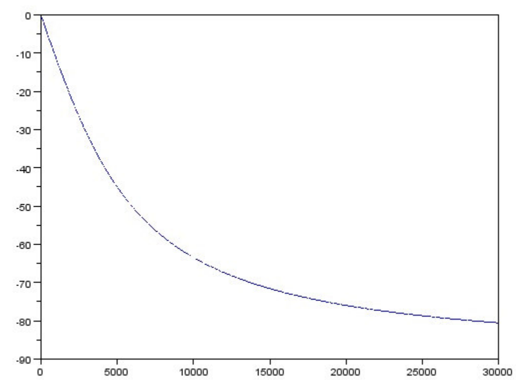
*Alla **frequenza = 0** il modulo di |G| vale 1 dunque $|V_o|=|V_i|$ cioè il segnale in **uscita non** viene **attenuato** dal filtro.*
*Ad **alta frequenza** il modulo di |G| vale 0 Dunque $|V_o|= 0$ cioè **non c'è segnale in uscita**.*
*Per **valori di frequenza intermedi** |G| è compreso tra 0 ed 1*
*Dunque l' uscita $|V_o|= |G||v_i|$ è minore dell'ingresso; **in uscita si ha un segnale attenuato***
Il circuito è dunque un PASSA BASSO:
"passano" i segnali in bassa freq. vengono attenuati quelli in alta freq.

FASE della F. di T.:

[3] $\boxed{\angle G(j\omega)=}\angle 1-\angle(1+j\omega RC)=0°-arctg(\omega RC)=\boxed{-arctg(\omega RC)}$

Se $\omega = 0 \Rightarrow -arctg(0) = 0°$ $\qquad \angle(G(j\omega)) = 0°$

Se $\omega \to \infty \Rightarrow -arctg(\infty) = -90°$ $\qquad \angle(G(j\omega)) = -90°$



*Alla **frequenza = 0** la fase di G vale 0°*
*dunque fase di V_o = fase di V_i cioè il segnale in **uscita non** viene **sfasato** dal filtro.*
*Ad **alta frequenza** la fase di G vale -90°*
*Dunque la fase di V_o = fase di V_i -90° cioè **l'uscita è sfasata di 90° in ritardo**.*
*Per **valori di frequenza intermedi** la fase di G è compresa tra 0 ed -90°*
*Dunque **in uscita si ha un segnale ritardato** di un angolo compreso tra 0° e 90°.*

DECIBEL ED ASSI LOGARITMICI

$|V_o| = |G| \cdot |V_i|$ esempio: $|V_o| = \frac{1}{100} \cdot |V_i|$

L' amplificazione e l'attenuazione (in generale: Guadagno) possono essere espresse:

- come numero puro:

[4] $|G| = \frac{|V_o|}{|V_i|}$ esempio: $|G| = \frac{1}{100} = 0.01$

- in **decibel**:

[5] $\boxed{|G|_{dB} = 20\log|G|}$ esempio: $|G|_{dB} = 20\log 0.01 = 20\log 10^{-2} = -40dB$

Noto il guadagno in decibel, per calcolare il guadagno come numero puro:

$$20\log|G| = |G|_{dB} \Rightarrow \log|G| = \frac{|G|_{dB}}{20} \Rightarrow$$

[6] $\boxed{|G| = 10^{\frac{|G|_{dB}}{20}}}$

Guadagno		Guadagno		Guadagno	
Numero puro	decibel	Numero puro	decibel	Numero puro	decibel
1	0dB			0.707	-3dB
10	20dB	0.1	-20dB	1.414	+3dB
100	40dB	0.01	-40dB	2	+6dB
1000	60dB	0.001	-60dB	0.5	-6dB

N.B.

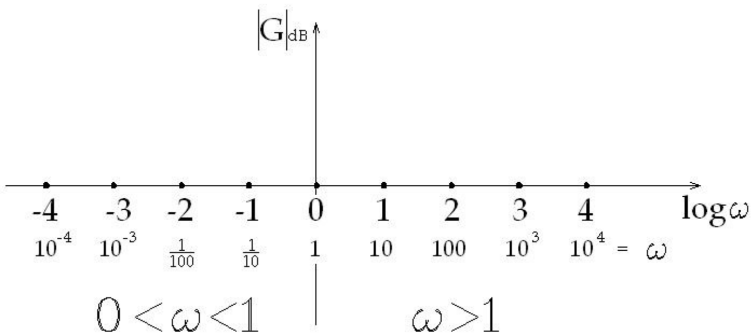
<u>|G|dB = 0dB</u> corrisponde a |G| = 1

quindi $|V_o| = |G| \cdot |V_i| = 1 \cdot |V_i| = |V_i|$ cioè **<u>uscita = ingresso</u>**

<u>|G|dB =-3dB</u> corrisponde a |G| ≅ 0.7 quindi $|V_o| = 0.7 \cdot |V_i|$ cioè **<u>uscita = 70% ingresso</u>**

<u>|G|dB =20dB</u> corrisponde a |G| =10 quindi $|V_o| = 10 \cdot |V_i|$ cioè **<u>uscita = 10 volte ingresso</u>**

Assi logaritmici:



DIAGRAMMI DI BODE

sono una rappresentazione approssimata realizzata su assi logaritmici.

Diagramma di BODE del MODULO:

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\frac{|1|}{|1+j\omega RC|} = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}$$

Se $\omega^2R^2C^2 \ll 1 \Leftrightarrow$ $\omega \ll \frac{1}{RC}$

in $\left(1+\omega^2R^2C^2\right)$ *trascuro* $\omega^2R^2C^2 \Rightarrow \left|G(j\omega)\right|_{dB} \cong 20\log\frac{1}{\sqrt{1}} = 20\log 1 =$ **0dB**

Se $\omega^2R^2C^2 \gg 1 \Leftrightarrow$ $\omega \gg \frac{1}{RC}$

in $\left(1+\omega^2R^2C^2\right)$ *trascuro* $1 \Rightarrow$

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} \cong 20\log\frac{1}{\sqrt{\omega^2R^2C^2}} = 20\log\frac{1}{\omega RC} = -20\log(\omega RC)\,dB$$

Calcoliamo la differenza tra |G| alla generica pulsazione ω_x>>1 e |G| 1 decade dopo cioè in **$10\cdot\omega_x$**:

$$\left.\begin{array}{r}\left|G(j\omega_x)\right|_{dB} \cong -20\log(\omega_x RC)\,dB \\ \left|G(j10\omega_x)\right|_{dB} \cong -20\log(10\omega_x RC)\,dB\end{array}\right| \Rightarrow \left|G(j10\omega_x)\right|_{dB} - \left|G(j\omega_x)\right|_{dB} =$$

$$-20\log(10\omega_x RC) + 20\log(\omega_x RC) = 20\log\left(\frac{\omega_x \cancel{RC}}{10\omega_x \cancel{RC}}\right) = 20\cdot(-1) = -20dB$$

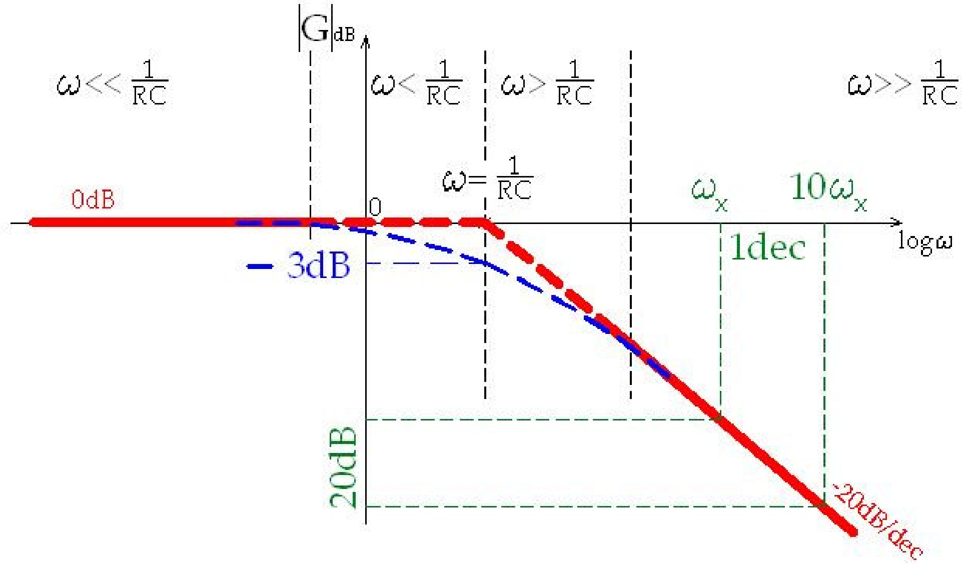
quindi $\left|G(j\omega)\right|_{dB}$ **cala di 20dB ogni decade**

Approssimando, ritengo vere le considerazioni precedenti anche per:

$\omega < \dfrac{1}{RC}$ ed $\omega > \dfrac{1}{RC}$.

Prolungando la retta di pendenza -20dB/dec verso sinistra, toccherà l'asse delle ascisse in $\omega = \dfrac{1}{RC}$, infatti:

$$\left| G(j\frac{1}{RC}) \right|_{dB} \cong 20\log \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 R^2C^2}} = 20\log 1 = 0\,dB$$



ω=1/RC prende il nome di **PULSAZIONE di TAGLIO** (**ω_t**)

Il valore esatto di |G| in 1/RC è:

$$\left| G(j\frac{1}{RC}) \right|_{dB} = 20\log \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\cancel{R^2C^2}}\cancel{R^2C^2}}} = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3dB \Leftrightarrow |G| = 10^{\frac{-3}{20}} = 0.707$$

Quindi $|V_o| \cong 0.7|V_i|$ anziché $|V_o| = |V_i|$ come indicato dal valore approssimato (0dB)

Dunque utilizzando il diagramma di Bode si compie un errore massimo pari al 30% (-3dB) del valore esatto.

DIAGRAMMA DI BODE DELLA FASE

$$\angle G(j\omega) = -arctg(\omega RC)$$

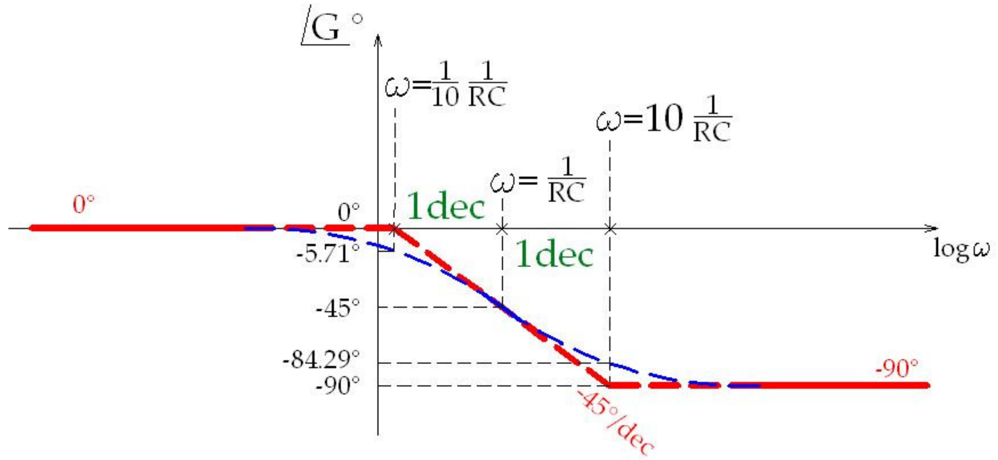
$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} \omega = 0 \rightarrow \angle = 0° \\ \omega = \dfrac{1}{RC} \rightarrow \angle = -arctg\left(\dfrac{1}{\cancel{RC}}\cancel{RC}\right) = -45° \\ \omega = \infty \rightarrow \angle = -90° \end{cases}$$

1 decade prima di 1/RC $\omega = \dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{1}{RC} \rightarrow \angle = -arctg\left(\dfrac{1}{10\cdot\cancel{RC}}\cancel{RC}\right) = -5{,}71°$

1 decade dopo di 1/RC $\omega = 10\cdot\dfrac{1}{RC} \rightarrow \angle = -arctg\left(\dfrac{10}{\cancel{RC}}\cancel{RC}\right) = -84{,}29°$

Quindi risulta accettabile approssimare l'andamento della fase a:

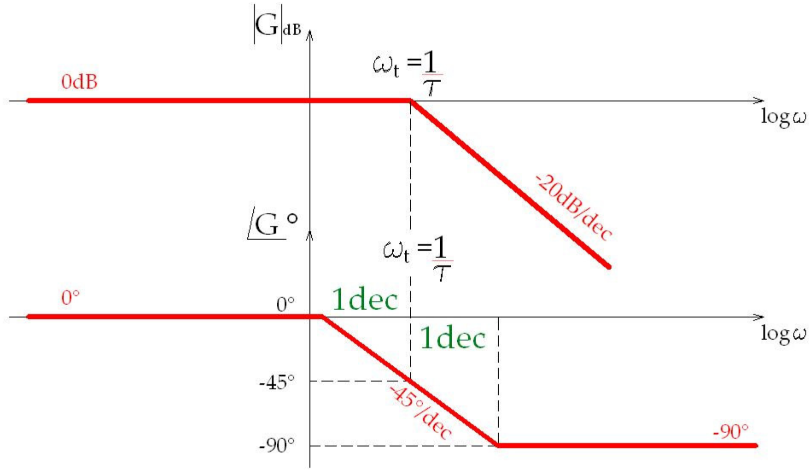
$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} 0° & \rightarrow se\,\omega < \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{RC}\right) \\ -45°\!/_{dec} & \rightarrow se\,\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{RC}\right) \le \omega \le 10\left(\dfrac{1}{RC}\right) \\ -90° & \rightarrow se\,\omega > 10\left(\dfrac{1}{RC}\right) \end{cases}$$



DIAGRAMMI DI BODE DI CASI PARTICOLARI

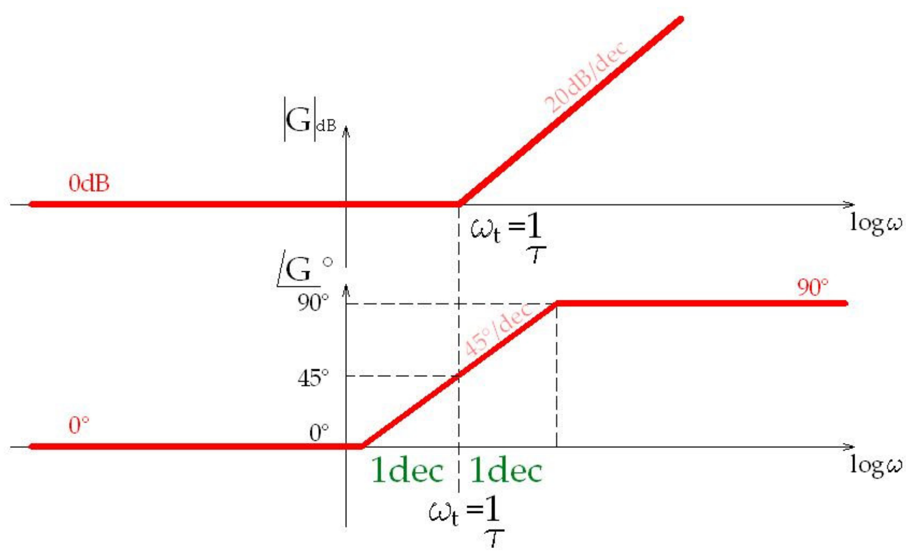
Quindi una F. di T. dalla forma: $G_1(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_t}} = \dfrac{1}{1 + j\omega\tau}$ dove $\boxed{\tau = \dfrac{1}{\omega_t}}$

$\boxed{G_1(s) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{s}{\omega_t}} = \dfrac{1}{1 + s\tau}}$ **dove** $\boxed{s = j\omega}$ ha il seguente diagramma di Bode:

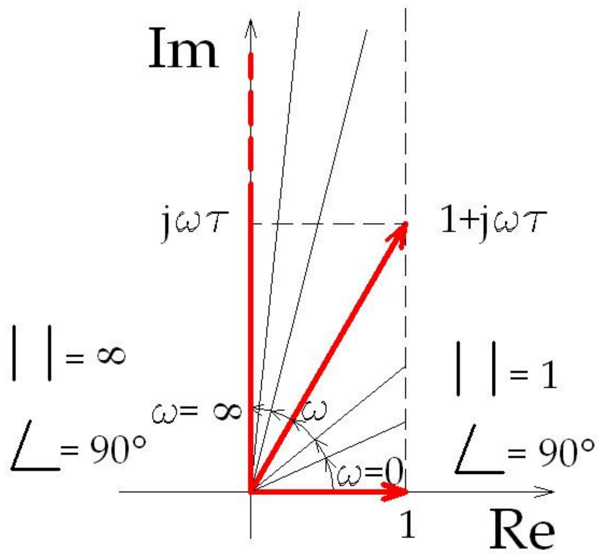


$\boxed{G_2(s) = 1 + s\tau}$

$$G_2(s) = \frac{1}{G_1(s)} \rightarrow \begin{cases} |G_2(s)|_{dB} = \left|\dfrac{1}{G_1(s)}\right|_{dB} = 20\log\left|\dfrac{1}{G_1(s)}\right| = -20\log|G_1(s)| = -|G_1(s)|_{dB} \\ \angle G_2(s) = \angle\left(\dfrac{1}{G_1(s)}\right) = -\angle G_1(s) \end{cases}$$



$\boxed{G_2(s) = 1 + s\tau}$



Rappresentando $G_2 = 1+j\omega\tau$ sul piano di Gauss si vede che:

se $\omega = 0$:

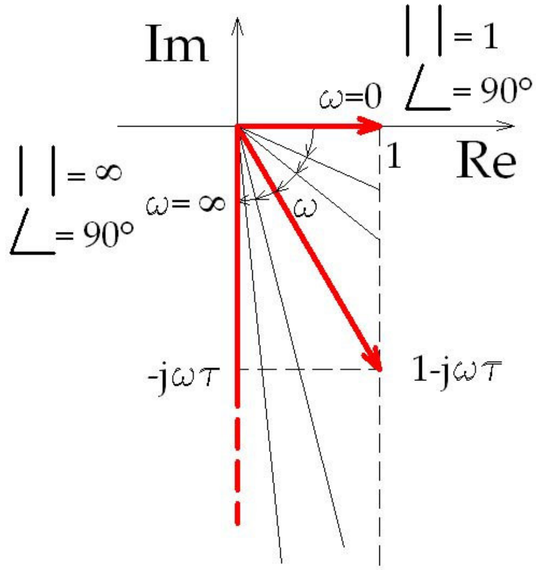
G_2 giace sull'asse dei reali ed ha modulo 1 (0 dB) e fase 0°

se $\omega \to \infty$:

G_2 si allunga e tende alla verticale quindi avrà modulo ∞ (∞ dB) e fase 90°

Queste considerazioni coincidono con quanto indicato dai diagrammi di Bode

$\boxed{G_3(s) = 1 - s\tau}$



Rappresentando $G_3 = 1-j\omega\tau$ sul piano di Gauss si vede che:

se $\omega = 0$:

G_3 giace sull'asse dei reali ed ha modulo 1 (0 dB) e fase 0°

se $\omega \to \infty$:

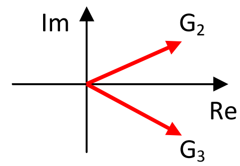
G_2 si allunga e tende alla verticale "in giù" quindi avrà modulo ∞ (∞ dB) e fase -90°

Quindi il modulo di G_3 ha lo stesso andamento del modulo di G_2 mentre la fase di G_3 è "il negativo" di quella di G_2

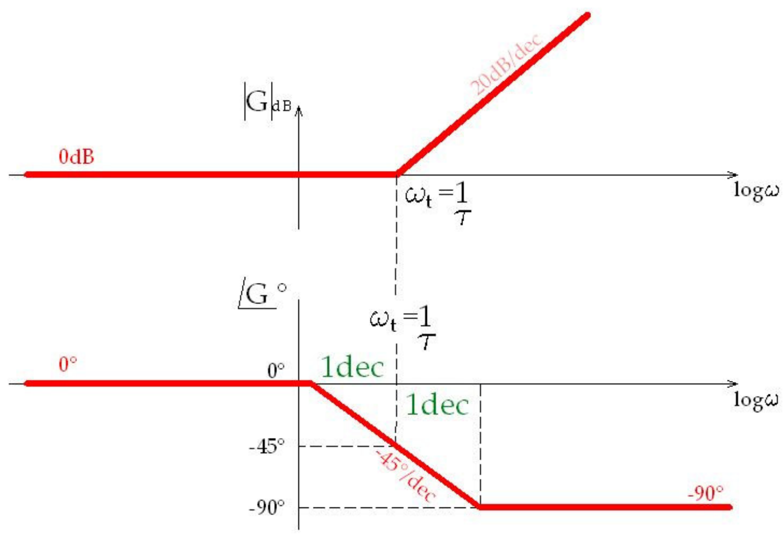
$\boxed{G_3(s) = 1 - s\tau}$

Oppure possiamo dire che G_3 essendo il complesso coniugato di G_2:

$$G_3(s) = G_2^*(s) \rightarrow \begin{cases} |G_3|_{dB} = |G_2|_{dB} \\ \angle G_3 = -\angle G_2 \end{cases}$$

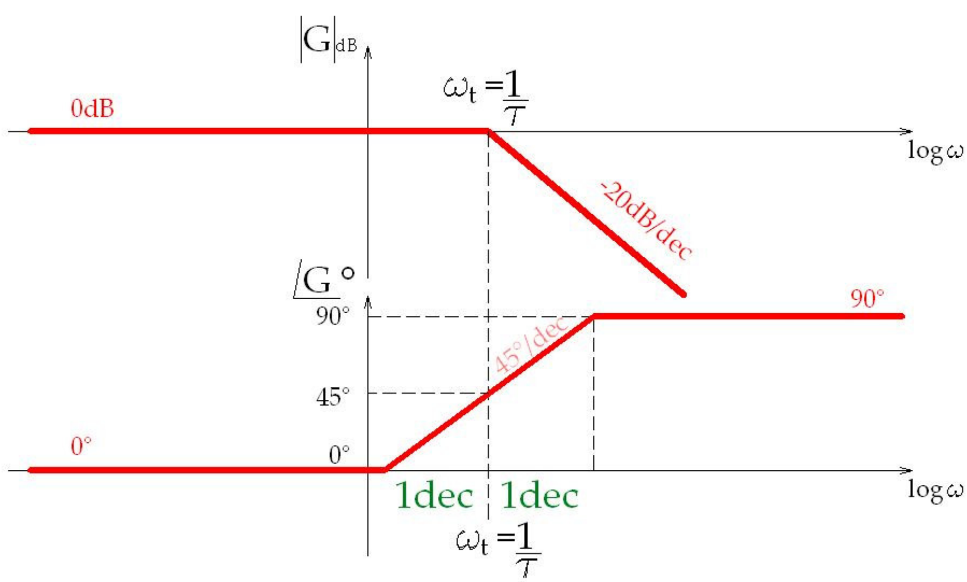


Quindi:

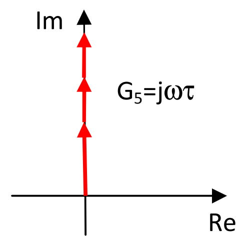


$\boxed{G_4(s) = \dfrac{1}{1 - s\tau}}$

$$\begin{cases} |G_4|_{dB} = -|G_3|_{dB} \\ \angle G_4 = -\angle G_3 \end{cases}$$



$\boxed{G_6(s) = s\tau} = j\omega\tau \rightarrow \in \mathrm{Im}$



$$\begin{cases} |G_6|_{dB} = 20\log\omega\tau = 20\log\omega + 20\log\tau \\ \angle G_5 = 90° \end{cases}$$

Ponendo:

$$\left.\begin{aligned} y &= |G_6|_{dB} \\ x &= \log\omega \\ c &= 20\log\tau \end{aligned}\right\} y = 20x + c$$

Sul diagramma di Bode

1. *Il modulo risulta essere una retta di pendenza 20 dB/dec*
2. *taglia l'asse y in 20logτ*
3. *taglia l'asse x in ω= 1/τ*

Infatti:

1. Se calcolo $|G_6|_{dB}$ in ω_x ed ad 1 decade dopo cioè in $10\omega_x$:

$$|G_6(10\omega_x)|_{dB} - |G_6(\omega_x)|_{dB} = (20\log 10\omega_x + 20\log\tau) - (20\log\omega_x + 20\log\tau) =$$

$$= 20\log 10\omega_x - 20\log\omega_x = 20\log\frac{10\omega_x}{\omega_x} = 20dB$$

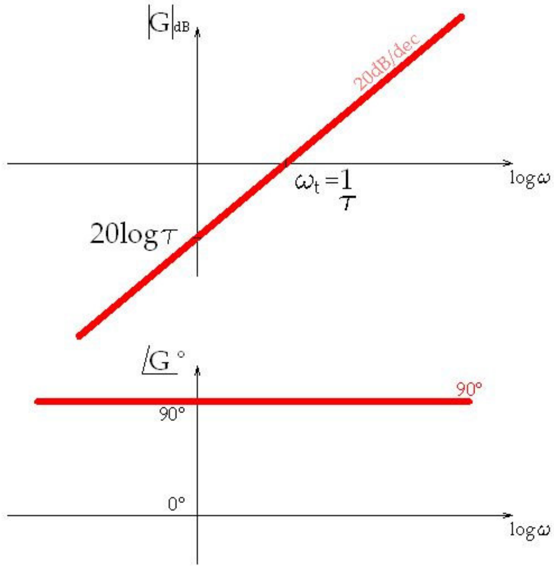
2. Per trovare l'intersezione con l'asse delle ordinate si pone $\log\omega=0$ in:

$$|G_6|_{dB} = 20\log\omega + 20\log\tau \qquad \text{risulta } |G_6|_{dB} = 20\log\tau$$

3. Per trovare l'intersezione con l'asse delle ascisse si pone $|G_6|_{dB} = 0$ in:

$$|G_6|_{dB} = 20\log\omega + 20\log\tau \qquad \text{risulta } 0 = 20\log\omega + 20\log\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\omega + \log\tau = 0 \Rightarrow \log\omega\tau = 0 \Rightarrow \omega\tau = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\tau}$$



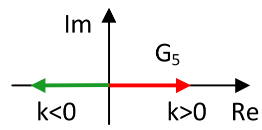
N.B.

Dal diagramma risulta che, se log$\omega \rightarrow -\infty$ (cioè $\omega \rightarrow 0$) $\Rightarrow |G_6|_{dB} \rightarrow -\infty$ quindi $G_6 = 10^{-\infty} = 0 \Rightarrow$

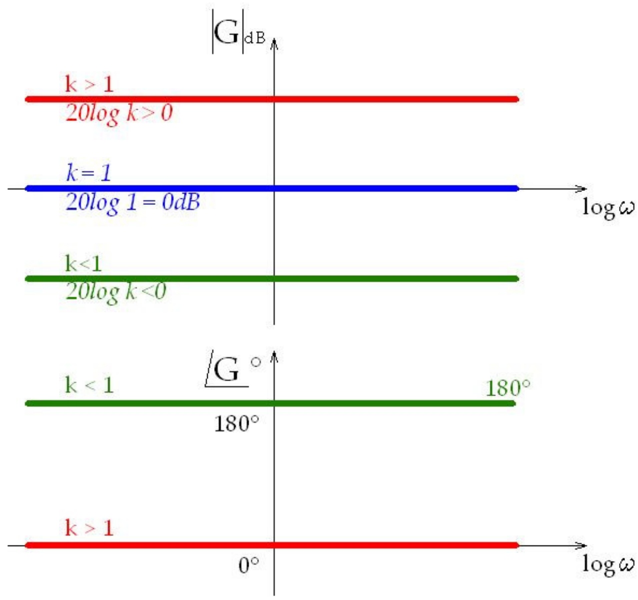
$V_o = 0 \cdot V_i = 0$

a frequenza 0 l'uscita è 0

$\boxed{G_7(s) = k \rightarrow \in \mathrm{Re}}$



$$\begin{cases} \left|G_7\right|_{dB} = 20\log k \\ \angle G_7 = \begin{cases} 0° \; se \; k > 0 \\ 180° \; se \; k < 0 \end{cases} \end{cases}$$



DIAGRAMMI DI FUNZIONI COMPOSTE

Se la F. di T. si può esprimere come prodotto o rapporto di F. di T. più semplici di cui sono noti i diagrammi di Bode,

$$G(s)=\frac{G_A(s)\cdot G_B(s)}{G_C(s)\cdot G_D(s)}$$

dato che:

$$\left|G(s)\right|_{dB}=\left|G_A(s)\right|_{dB}+\left|G_B(s)\right|_{dB}-\left|G_C(s)\right|_{dB}-\left|G_D(s)\right|_{dB}$$

$$\angle G(s)=\angle G_A(s)+\angle G_B(s)-\angle G_C(s)-\angle G_D(s)$$

i diagrammi di Bode di G si possono ottenere per via grafica sommando o sottraendo i diagrammi di Bode delle F. di T. componenti.

Risulta però più semplice eseguire le somme: quindi è preferibile fare:

$$\left|G(s)\right|_{dB}=\left|G_A(s)\right|_{dB}+\left|G_B(s)\right|_{dB}+\left|\frac{1}{G_C(s)}\right|_{dB}+\left|\frac{1}{G_D(s)}\right|_{dB}$$

$$\angle G(s)=\angle G_A(s)+\angle G_B(s)+\angle\left(\frac{1}{G_C(s)}\right)+\angle\left(\frac{1}{G_D(s)}\right)$$

Es. $G(s)=\frac{1+s\tau_2}{1+s\tau_1}=\left(\frac{1}{1+s\tau_1}\right)\cdot\left(1+s\tau_2\right)=G_1(s)\cdot G_2(s)$ $\rightarrow$ si sommano moduli e fasi di G_1 e G_2 *anziché eseguire la sottrazione grafica di 2 G del "tipo 2" con diversa pulsazione di taglio* $(\tau_1 \neq \tau_2)$