

Sintesi di funzioni booleane

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

①

②

③

④

Per determinare la funzione booleana corrispondente alla tabella della verità data, si scrive la somma dei mintermini corrispondenti alle uscite uguali ad 1

$$Y = \underbrace{\bar{A}\bar{B}C}_{\text{①}} + \underbrace{\bar{A}BC}_{\text{②}} + \underbrace{A\bar{B}\bar{C}}_{\text{③}} + \underbrace{ABC}_{\text{④}}$$

TEOREMI E PROPRIETÀ DELL'ALGEBRA BOOLEANA

Teorema della Complementazione	$A + \bar{A} = 1$	$A \cdot \bar{A} = 0$
Teorema dell'idempotenza	$A + A = A$	$A \cdot A = A$
Teorema di Identità	$A + 0 = A$	$A \cdot 1 = A$
Teorema di Annullamento	$A + 1 = 1$	$A \cdot 0 = 0$
Proprietà Commutativa	$A + B = B + A$	$A \cdot B = B \cdot A$
Proprietà Associativa	$A + (B + C) = (A + B) + C$	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
Proprietà Distributiva	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
Teorema di De Morgan	$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$	$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$
Teorema dell'Involuzione	$\bar{\bar{A}} = A$	$A = \bar{\bar{A}}$
Primo Teorema dell'Assorbimento	$A + A \cdot B = A$	$A \cdot (A + B) = A$
Secondo Teorema dell'Assorbimento	$A + \bar{A} \cdot B = A + B$	$A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot B$

LEGGE DI DUALITÀ

- OR è il duale di AND e viceversa;
- 0 è "duale" di 1, e viceversa;

Da qualsiasi identità booleana se ne può ricavare un'altra per dualità, sostituendo cioè ad ogni operatore logico ed ad ogni cifra binaria il rispettivo duale.

Esempi di esercizi

$$\overline{AB} + A\overline{B} \underset{\text{De M.}}{=} \overline{A+B} + A\overline{B} \underset{\text{distrib.}}{=} \overline{A+B} \cdot (1+A) \underset{\text{annull.}}{=} \overline{A+B} \cdot 1 \underset{\text{ident.}}{=} \overline{A+B} \underset{\text{De M.}}{=} \overline{A} \cdot \overline{B} \underset{\text{invol.}}{=} AB$$

$$\begin{aligned} A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} &= A(\overline{B} + C) + \overline{A}B\overline{C} + (\overline{A} + B)\overline{C} = A\overline{B} + AC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}C + B\overline{C} = \\ &= A\overline{B} \cdot (1 + \overline{C}) + AC + \overline{A}C \cdot \overline{B}C = A\overline{B}(1) + AC + (A + \overline{C}) \cdot (B + \overline{C}) = \\ &= A\overline{B} + AC + AB + AC + B\overline{C} + \overline{C}\overline{C} = A \cdot (\overline{B} + \overline{C} + B + \overline{C}) + \overline{C} \cdot \underbrace{(B + 1)}_1 = \\ &= A \cdot \left(\underbrace{\overline{B} + B}_1 + \overline{C} \right) + \overline{C} = A \cdot \left(\underbrace{1 + \overline{C}}_1 \right) + \overline{C} = A + \overline{C} \end{aligned}$$

Mappe di Karnaugh

Inserire un '1' nelle mappe nella posizione appropriata e per ogni gruppo AND presente nella funzione booleana da minimizzare.

Esempi con mappe per 2, 3 e 4 variabili:

		B	
		0	1
A	0		
	1	1	1

$A\overline{B} + AB$

		BC			
		00	01	11	10
A	0		1	1	
	1			1	

$\overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00				
	01		1		1
	11		1		1
	10		1		

$\overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + AB\overline{C}D + ABC\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D}$

Raggruppare gli '1' secondo le seguenti regole:

- 1) I raggruppamenti si effettuano per rettangoli o quadrati per un numero di celle pari ad una potenza di 2: 1, 2, 4, 8, 16, ..
- 2) I raggruppamenti devono comprendere il maggior numero di celle possibili nel rispetto della regola 1).
- 3) Una o più celle possono appartenere a più raggruppamenti.

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	1	1
	01		1	1	
	11	1	1	1	
	10	1			

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1			1
	01				
	11				
	10	1			1

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	1	1
	01	1			1
	11				
	10		1	1	

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1		
	01	1	1	1	1
	11	1	1	1	1
	10	1	1		

Per ogni raggruppamento scrivere l'AND delle variabili che rimangono 'fisse' all'interno dell'raggruppamento:

		CD				
			00	01	11	10
AB	00	1	1	1	1	
	01		1	1		
	11	1	1	1		
	10	1				

$A\bar{C}\bar{D}$

A=1, C=0, D=0 sono 'fisse'; B varia

		CD				
			00	01	11	10
AB	00	1	1	1	1	
	01		1	1		
	11	1	1	1		
	10	1				

$\bar{A}\bar{B}$

A=0, B=0 sono 'fisse'; C e D variano

		CD				
			00	01	11	10
AB	00	1	1	1	1	
	01		1	1		
	11	1	1	1		
	10	1				

BD

B=1, D=1 sono 'fisse'; A e C variano

		CD				
			00	01	11	10
AB	00	1	1	1	1	
	01	1			1	
	11					
	10		1	1		

$\bar{B}D$

B=0, D=1 sono 'fisse'; A e C variano

		CD				
			00	01	11	10
AB	00	1			1	
	01					
	11					
	10	1			1	

$\bar{B}\bar{D}$

B=0, D=0 sono 'fisse'; A e C variano

Infine scrivere l'OR dei gruppi AND ottenuti

		CD				
			00	01	11	10
AB	00	1	1	1	1	
	01		1	1		
	11	1	1	1		
	10	1				

$A\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B} + BD$ Funzione minimizzata

La funzione da minimizzare era:

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD + AB\bar{C}\bar{D} + ABCD + AB\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$