REGIME SINUSOIDALE

OPERAZIONI TRA GRANDEZZE ISOFREQUENZIALI (*STESSA Ω QUINDI STESSA F*)

$$a(t) = A_M sen(\omega t + \alpha) \quad b(t) = B_M sen(\omega t + \beta)$$

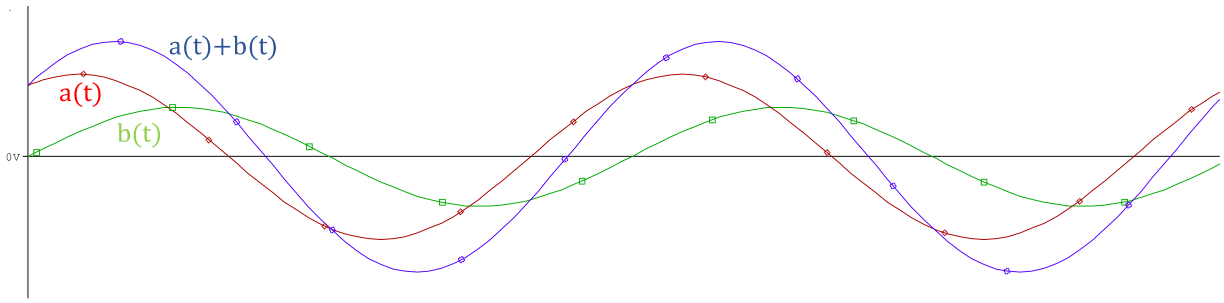
SOMMA E DIFFERENZA

Somma e differenza risultano sinusoidali ed alla stessa frequenza di a(t) e b(t):

$$c(t) = a(t) \pm b(t) = C_M sen(\omega t + \gamma)$$

Dove:

$$\gamma = arctg\left(\frac{A_M sen(\alpha) \pm B_M sen(\beta)}{A_M cos(\alpha) \pm B_M cos(\beta)}\right) \quad C_M = \sqrt{A_M^2 + B_M^2 \pm 2A_M B_M(\alpha - \beta)}$$



Dimostrazione, più avanti, con i vettori

PRODOTTO PER UNA COSTANTE K ∈ ℝ

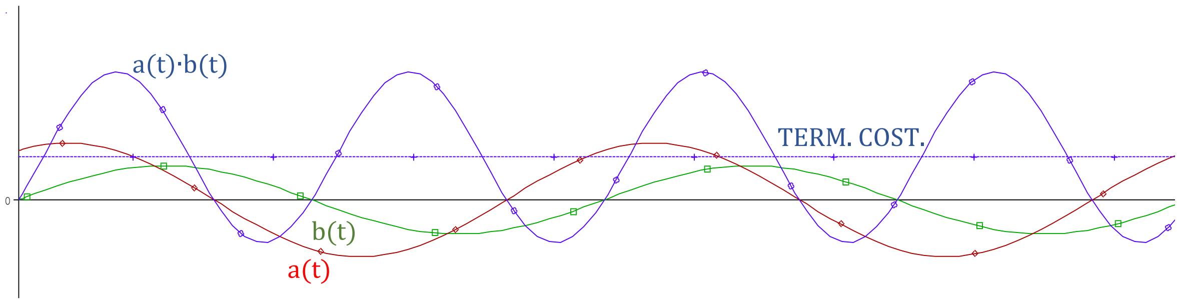
Risulta sinusoidale ed isofrequenziale ad a(t)

$$c(t) = k \cdot a(t) = kA_M sen(\omega t + \alpha)$$

PRODOTTO DI 2 GRANDEZZE SINUSOIDALI

È sinusoidale ma a <u>frequenza doppia</u> di quella dei fattori ed inoltre risulta traslata lungo l'asse y

$$c(t) = a(t) \cdot b(t) = \underbrace{\frac{A_M B_M}{2} cos(\alpha - \beta)}_{\substack{TERMINE \\ COSTANTE}} - \underbrace{\frac{A_M B_M}{2} cos(2\omega t + \alpha + \beta)}_{\substack{TERMINE \\ A\ FREQUENZA\ DOPPIA}}$$



RAPPORTO TRA 2 GRANDEZZE SINUSOIDALI

Risulta essere un numero complesso costante

$$c(t) = \frac{a(t)}{b(t)} = cost \in \mathbb{C}$$

DERIVATA

La derivazione causa una rotazione in anticipo di $\frac{\pi}{2}$

$$c(t) = \frac{da(t)}{dt} = \frac{d\left(A_M sen(\omega t + \alpha)\right)}{dt} = \omega \cdot A_M cos(\omega t + \alpha) = \omega A_M sen\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

c(t) è in ANTICIPO di $\frac{\pi}{2}$ su a(t)

INTEGRALE

L'integrazione causa una rotazione in ritardo di $\frac{\pi}{2}$

$$c(t) = \int a(t)dt = \int A_M sen(\omega t + \alpha)dt = -\frac{A_M}{\omega} cos(\omega t + \alpha) = \frac{A_M}{\omega} sen\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

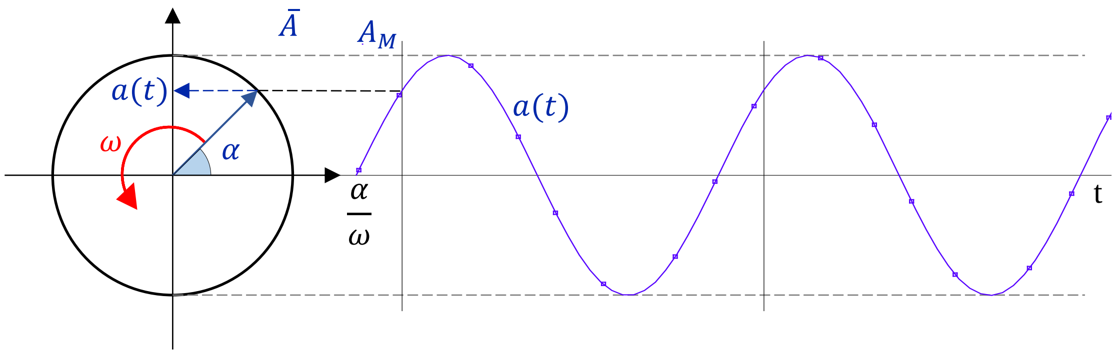
c(t) è in RITARDO di $\frac{\pi}{2}$ su a(t)

Sia l'operazione di derivata che di integrazione danno come risultato una sinusoide di frequenza f anticipata o ritardata di $\frac{\pi}{2}$

RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE (FASORIALE)

Ogni grandezza sinusoidale può essere rappresentata mediante un vettore $\bar{A}$ di modulo A_M, $\left(o\ V_{EFF} = \frac{A_M}{\sqrt{2}}\right)$ e fase iniziale α e rotante con velocità angolare ω. Detti vettori prendono il nome di FASORI. È possibile risalire alla grandezza sinusoidale originale considerando la proiezione del fasore sull'asse y.

$$a(t) = A_M sen(\omega t + \alpha) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} |\bar{A}| = A_M & MODULO \\ \angle\bar{A} = \alpha & FASE \end{cases}$$



Se le grandezze considerate sono isofrequenziali, i corrispondenti fasori manterranno la reciproca posizione durante la rotazione: è quindi possibile limitare lo studio all'istante 0 ed estendere successivamente i risultati ad un generico istante t.

Le operazioni viste in precedenza possono essere riviste usando i fasori.

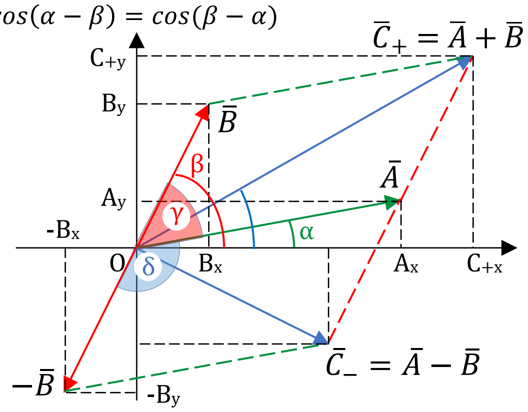
SOMMA

$$\bar{C}_+ = \bar{A} + \bar{B}$$

Per il teorema di Carnot:

$$|\bar{C}_+| = \sqrt{|\bar{A}|^2 + |\bar{B}|^2 - 2|\bar{A}||\bar{B}|\cos(\gamma)} \quad \gamma \triangleq \alpha - \beta \qquad NB\ \ cos(\alpha - \beta) = cos(\beta - \alpha)$$

$$\angle\bar{C}_+ = arctg\left(\frac{|\bar{A}|\ \mathrm{sen}(\alpha) + |\bar{B}|\mathrm{sen}(\beta)}{|\bar{A}|\cos(\alpha) + |\bar{B}|\cos(\beta)}\right)$$



Dimostrazione:

$$\angle\bar{C}_+ = arctg\left(\frac{C_{+y}}{C_{+x}}\right) = arctg\left(\frac{A_y + B_y}{A_x + B_x}\right)$$

SOTTRAZIONE

$$\bar{C}_- = \bar{A} - \bar{B} = \bar{A} + (-\bar{B})$$

$$|\bar{C}_-| = \sqrt{|\bar{A}|^2 + |-\bar{B}|^2 - 2|\bar{A}||-\bar{B}|\cos(\delta)} \quad \delta = 180 - \gamma \quad NB\ \ cos(180 - \gamma) = -cos(\gamma)$$

$$= \sqrt{|\bar{A}|^2 + |\bar{B}|^2 + 2|\bar{A}||\bar{B}|\cos(\gamma)}$$

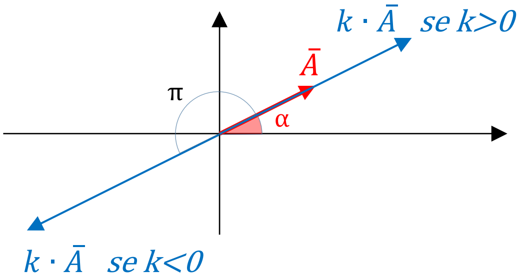
$$\angle\bar{C}_- = arctg\left(\frac{C_{-y}}{C_{-x}}\right) = arctg\left(\frac{A_y - B_y}{A_x - B_x}\right) = arctg\left(\frac{|\bar{A}|\ \mathrm{sen}(\alpha) - |\bar{B}|\mathrm{sen}(\beta)}{|\bar{A}|\cos(\alpha) - |\bar{B}|\cos(\beta)}\right)$$

PRODOTTO PER UNA COSTANTE K ∈ ℝ

$$\bar{C} = k \cdot \bar{A}$$

$$|\bar{C}| = |k| \cdot |\bar{A}|$$

$$\angle\bar{C} = \begin{cases} \angle\bar{A} & se\ k > 0 \\ \angle\bar{A} + \pi & se\ k < 0 \end{cases}$$



PRODOTTO

Non ∃ la rappresentazione vettoriale in quanto il prodotto non ha la stessa frequenza dei fattori.

RAPPORTO

Il rapporto non è un fasore ma un vettore fisso (operatore vettoriale)

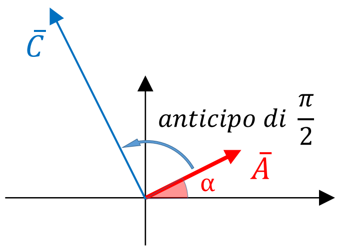
DERIVATA

$$\bar{C} = \bar{A}\,'$$

$$|\bar{C}| = \omega|\bar{A}|$$

$$\angle\bar{C} = \angle\bar{A} + \frac{\pi}{2}$$

Dim più avanti in notazione esponenziale



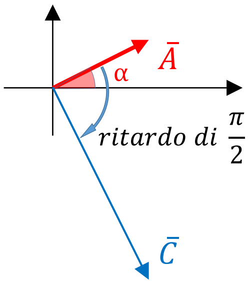
INTEGRALE

$$\bar{C} = \int \bar{A}$$

$$|\bar{C}| = \frac{1}{\omega}|\bar{A}|$$

$$\angle\bar{C} = \angle\bar{A} - \frac{\pi}{2}$$

Dim più avanti in notazione esponenziale



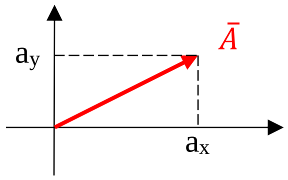
RAPPRESENTAZIONE SIMBOLICA

Un vettore può essere rappresentato sul piano in diversi modi:

RAPPRESENTAZIONE MEDIANTE COORDINATE CARTESIANE

Il vettore viene rappresentato mediante una coppia di coordinate cartesiane

$$\bar{A} = (a_x;\ a_y)$$



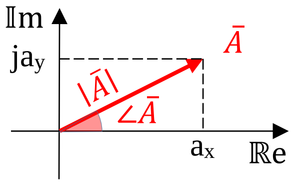
RAPPRESENTAZIONE POLARE

$$\bar{A} = |\bar{A}|\ \angle\bar{A}$$

dove:

$$|\bar{A}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \textit{Modulo}$$

$$\angle\bar{A} = arctg\left(\frac{a_x}{a_y}\right) \qquad \textit{Fase}$$

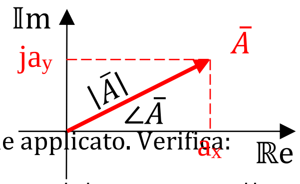


RAPPRESENTAZIONE COMPLESSA

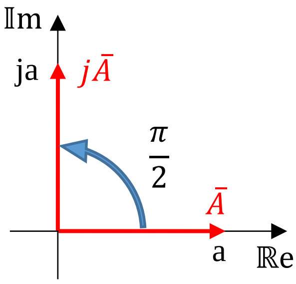
Definizione di j (operatore complesso): $\boxed{j \triangleq \sqrt{-1}}$ oppure/quindi $\boxed{j^2 \triangleq -1}$

$\bar{A} = a_x + ja_y \quad a_x, a_y \in \mathbb{R}\text{e} \quad ja_y \in \mathbb{I}\text{m}$

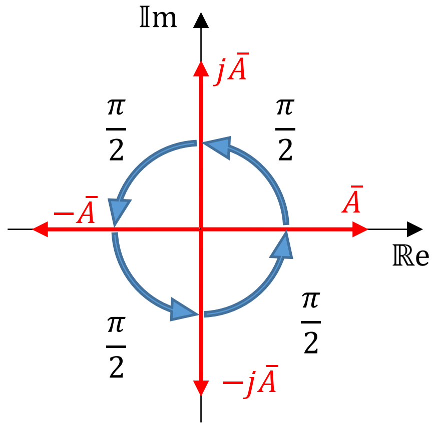
$$a_x = |\bar{A}| \cdot cos(\angle\bar{A}) \quad \textit{parte reale}$$
$$a_y = |\bar{A}| \cdot sen(\angle\bar{A}) \quad \textit{parte immaginaria}$$



L'operatore j ha la proprietà di far ruotare di 90° in anticipo il vettore a cui viene applicato. Verifica:
Se $\angle\bar{A} = 0$ (vedi figura), cioè se $\bar{A}$ è un numero reale (quindi $\bar{A} = a$), verrà rappresentato come un vettore giacente sull'asse delle ascisse; moltiplichiamolo ora $\bar{A}$ per j:



$j\bar{A} = ja$ risulterà immaginario puro e quindi verrà rappresentato sull'asse delle ordinate cioè ruotato in anticipo di 90° rispetto $\bar{A}$.



Inoltre dai seguenti calcoli si evince che:

$$j^2 = j \cdot j = -1 \;\rightarrow\; j^2\bar{A} = -\bar{A} \;\rightarrow\; j^2 \;\; \textit{fa ruotare } \bar{A} \textit{ di } 180°$$
$$j^3 = j^2 \cdot j = -j \;\rightarrow\; j^3\bar{A} = -j\bar{A} \;\rightarrow\; j^3 \;\; \textit{fa ruotare } \bar{A} \textit{ di } 270°$$
$$j^4 = j^2 \cdot j^2 = 1 \;\rightarrow\; j^4\bar{A} = \bar{A} \;\rightarrow\; j^4 \;\; \textit{fa ruotare } \bar{A} \textit{ di } 360°$$

RAPPRESENTAZIONE TRIGONOMETRICA

a_x e a_y possono essere espressi dalle:

$$a_x = |\bar{A}| \cdot \cos\alpha \qquad a_y = |\bar{A}| \cdot \text{sen}\,\alpha$$

Quindi

$$\bar{A} = a_x + ja_y = |\bar{A}|\cos\alpha + j|\bar{A}|\,\text{sen}\,\alpha = \underbrace{|\bar{A}|(\cos\alpha + j\,\text{sen}\,\alpha)}_{\textit{Rapp. TRIGONOMETRICA}}$$

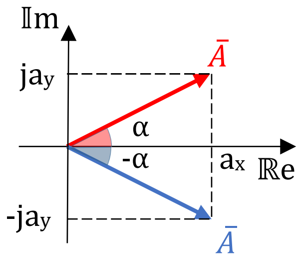
RAPPRESENTAZIONE IN FORMA ESPONENZIALE

Dalla FORMULA DI EULERO:

$$e^{\pm j\alpha} = \cos\alpha + j\,\text{sen}\,\alpha \qquad \overset{\text{Modulo}}{\boxed{\left|e^{\pm j\alpha}\right| = 1}} \qquad \overset{\text{Fase}}{\boxed{\angle e^{\pm j\alpha} = \alpha}}$$

$$\bar{A} = |\bar{A}|(\cos\alpha + j\,\text{sen}\,\alpha) = \underbrace{|\bar{A}|\,e^{\pm j\alpha}}_{Rapp.\ ESPONENZIALE}$$

COMPLESSO CONIUGATO:



Dato $\bar{A} = a_x + ja_y = |\bar{A}|\,e^{+j\alpha}$ si definisce il suo complesso coniugato:

$$\bar{A}^* = a_x - ja_y = |\bar{A}|\,e^{-j\alpha}$$

Risulta:

$$|\bar{A}^*| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = |\bar{A}| \quad e \quad \angle\bar{A}^* = \text{atan}\left(\frac{-a_y}{a_x}\right) = -\text{atan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \angle\bar{A}^*$$

Proprietà:

$$\bar{A}\bar{A}^* = (a_x + ja_y)(a_x - ja_y) = a_x^2 - ja_xa_y + ja_xa_y - j^2a_y^2 = a_x^2 + a_y^2 = |\bar{A}|^2 \in \mathbb{R}$$

Usando la rappresentazione esponenziale si giunge al medesimo risultato:

$$\bar{A}\bar{A}^* = |\bar{A}|\,e^{+j\alpha} \cdot |\bar{A}|\,e^{+j\alpha} = |\bar{A}|^2$$

Come già detto, una grandezza sinusoidale può essere rappresentata mediante il fasore rotante corrispondente:

$$a(t) = A_M sen(\omega t + \alpha) \quad \rightarrow \quad \bar{A} = |\bar{A}|\,e^{j(\omega t+\alpha)} = |\bar{A}|\,e^{j\alpha} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\substack{indica\ la\\ dipendenza\\ dal\ tempo}}$$

Posso, per determinati calcoli, tralasciare $e^{j\omega t}$ ottenendo una grandezza costante:

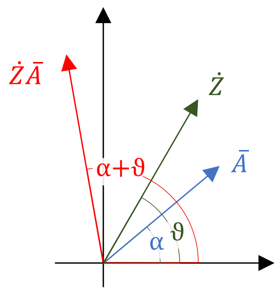
GRANDEZZA SINUSOIDALE: $\bar{A} = |\bar{A}|\,e^{j\alpha}$ (*la dipendenza dal tempo è sottointesa*)

Si indica con un puntino quelle grandezze in cui non c'è la dipendenza dal tempo (*nemmeno sottointesa*)

OPERATORE VETTORIALE: $\dot{Z} = |\dot{Z}|\,e^{j\vartheta}$

PRODOTTO TRA GRANDEZZA SINUSOIDALE ED OPERATORE:

$$\dot{Z}\bar{A} = |\dot{Z}|\,e^{j\vartheta} \cdot |\bar{A}|\,e^{j\alpha} = |\dot{Z}||\bar{A}|\,e^{j(\alpha+\vartheta)}$$



Dal risultato precedente e dalle considerazioni già fatte sulla rappresentazione esponenziale si evinche che:

MODULO DEL PRODOTTO $\dot{Z}\bar{A}$ $\quad |\dot{Z}\bar{A}| = |\dot{Z}||\bar{A}|$ $\quad$ = PRODOTTO DEI MODULI

FASE DEL PRODOTTO $\dot{Z}\bar{A}$ $\quad \angle\dot{Z}\bar{A} = \alpha + \vartheta$ $\quad$ = SOMMA DELLA FASI

Ovvero **$\dot{Z}$ fa rotare $\bar{A}$ di ϑ**

In particolare, ed in accordo con quanto già visto in precedenza, moltiplicare per i seguenti operatori:

$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ fa ruotare di $\frac{\pi}{2}$ il vettore a cui viene applicato

$e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$ fa ruotare di $-\frac{\pi}{2}$ il vettore a cui viene applicato

$e^{j\pi} = e^{-j\pi} = -1$ fa ruotare di π il vettore a cui viene applicato

$e^{j0} = 1$ non fa ruotare il vettore a cui viene applicato

SOMMA

$$\bar{A} = a_x + ja_y \quad \bar{B} = b_x + jb_y$$

$$\bar{C} = \bar{A} + \bar{B} = a_x + ja_y + b_x + jb_y = (a_x + b_x) + j\left(a_y + b_y\right)$$

A e B devono essere entrambe fasori od entrambe operatori ed avere la stessa unità di misura.

PRODOTTO

$$\bar{C} = \bar{A}\dot{B} = |\bar{A}|\, e^{j\alpha} \cdot \left|\dot{B}\right|\, e^{j\beta} = |\bar{A}|\left|\dot{B}\right|\, e^{j(\alpha+\beta)}$$

$$\text{N. B.} \quad |\bar{C}| = |\bar{A}| \cdot \left|\dot{B}\right| \quad \angle\bar{C} = \angle\bar{A} + \angle\dot{B}$$

I fattori A e B <u>non possono essere entrambe grand. sinusoidali</u> altrimenti C non avrà la stessa frequenza di A e B:

$$\bar{C} = \bar{A}\bar{B} = |\bar{A}|\, e^{j(\omega t+\alpha)} \cdot |\bar{B}|\, e^{j(\omega t+\beta)} = |\bar{A}||\bar{B}|\, e^{j(2\omega t+\alpha+\beta)}$$

DIVISIONE TRA GRANDEZZA SIN. ED OPERATORE

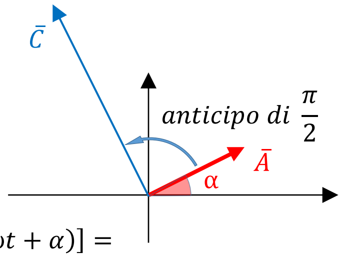
$$\bar{C} = \frac{\bar{A}}{\dot{B}} = \frac{|\bar{A}|\, e^{j(\omega t+\alpha)}}{\left|\dot{B}\right|\, e^{j\beta}} = \frac{|\bar{A}|}{\left|\dot{B}\right|} e^{j(\omega t+\alpha-\beta)} = \frac{|\bar{A}|}{\left|\dot{B}\right|} e^{j(\alpha-\beta)} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\substack{parte \\ normalmente \\ sottintesa}}$$

$$\text{N. B.} \quad |\bar{C}| = \frac{|\bar{A}|}{\left|\dot{B}\right|} \quad \angle\bar{C} = \angle\bar{A} - \angle\dot{B}$$

DIVISIONE TRA GRANDEZZA ENTRAMBE SINUSOIDALI

$$\frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{|\bar{A}|\, e^{j(\omega t+\alpha)}}{|\bar{B}|\, e^{j(\omega t+\beta)}} = \frac{|\bar{A}|}{|\bar{B}|} e^{j(\cancel{\omega t}+\alpha-\cancel{\omega t}-\beta)} = \frac{|\bar{A}|}{\left|\dot{B}\right|} e^{j(\alpha-\beta)} \quad OPERATORE \in \mathbb{C} \quad non\ c'é\ dipendenza\ dal\ tempo$$

DERIVATA (SOLO X LE GRANDEZZE SINUSOIDALI)



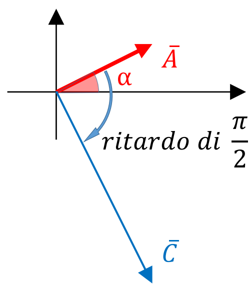
$$\bar{C} = \frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{d|\bar{A}|\, e^{j(\omega t+\alpha)}}{dt} = j\omega e^{j(\omega t+\alpha)} = j\omega\bar{A}$$

dim.

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{d\{A[\cos(\omega t+\alpha) + j\,\mathrm{sen}(\omega t+\alpha)]\}}{dt} = A[-\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\alpha) + j\omega\cos(\omega t+\alpha)] =$$

$$= j\omega A[\cos(\omega t+\alpha) + j\cos(\omega t+\alpha)] = j\omega|\bar{A}|\, e^{j(\omega t+\alpha)}$$

INTEGRALE (SOLO PER LE GRANDEZZE SINUSOIDALI)



$$\bar{C} = \int \bar{A}\, dt = \int |\bar{A}|\, e^{j(\omega t+\alpha)}\, dt = \frac{|\bar{A}|}{j\omega}\, e^{j(\omega t+\alpha)} = \frac{-j}{\omega}\bar{A}$$

$$NB \quad \frac{de^x}{dx} = e^x \quad \int e^x = e^x$$

VALORE EFFICACE

$$V_{EFF} \triangleq \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} v^2(t')\,dt'} \quad se\ v(t)\ \grave{e}\ sinusoidale \quad V_{EFF} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$$

Dim.

$$V_{EFF} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} [V_M sen(\omega t' + \alpha)]^2\,dt'} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} {V_M}^2 sen^2(\omega t' + \alpha)\,dt'}$$

$$ricordando\ che \quad sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} {V_M}^2\,\frac{1-\cos(2\omega t' + 2\alpha)}{2}\,dt'} = \sqrt{\frac{1}{T}\frac{{V_M}^2}{2}\left[t' - \frac{\mathrm{sen}(2\omega t' + 2\alpha)}{2\omega}\right]_t^{t+T}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\frac{{V_M}^2}{2}\left[(t+T) - \frac{\mathrm{sen}(2\omega(t+T) + 2\alpha)}{2\omega} - t + \frac{\mathrm{sen}(2\omega t + 2\alpha)}{2\omega}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\frac{{V_M}^2}{2}\left[T - \frac{\mathrm{sen}(2\omega t + 2\alpha + 2\omega T)}{2\omega} + \frac{\mathrm{sen}(2\omega t + 2\alpha)}{2\omega}\right]}$$

Se ω è intero, i 2 termini in seno risultano sfasati di un numero intero (2ω) di periodi e quindi sono uguali e si annullano:

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\frac{{V_M}^2}{2}T} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$$

Se ω è non è intero:

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\frac{{V_M}^2}{2}\left[T - \frac{sen\left[2\omega\left(t + \frac{\alpha}{\omega} + T\right)\right]}{2\omega} + \frac{sen\left[2\omega\left(t + \frac{\alpha}{\omega}\right)\right]}{2\omega}\right]}$$

i 2 termini in seno risultano sfasati di un periodo e quindi sono comunque uguali e si annullano:

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\frac{{V_M}^2}{2}T} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$$

CIRCUITI ELETTRICI IN REGIME SINUSOIDALE

$$v(t) = V_M sen(\omega t + \alpha_v) = \sqrt{2} V_{EFF} sen(\omega t + \alpha_v) \quad Valore\ efficace \quad V_{EFF} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$$

$$i(t) = I_M sen(\omega t + \alpha_i) = \sqrt{2} I_{EFF} sen(\omega t + \alpha_i)$$

D'ora in poi V_{EFF} verrà indicato per semplicità solo V (V_R, V_L, V_C, ..) ed I_{EFF} solo I (I_R, I_L, I_C, ..)

Il modulo dei fasori sarà espresso con il valore efficace

Sfasamento tra v e i:

$$\varphi \triangleq \alpha_v - \alpha_i \quad Phi$$

RESISTORE

Data la corrente su R:

$$i_R(t) = I_{RM} sen(\omega t + \alpha_i) = \sqrt{2} I_R sen(\omega t + \alpha_i) \quad I_{RM} = corrente \max su\ R \quad I_R = corr.eff.\ su\ R$$

La tensione risulta:

$$v_R(t) = R i_R(t)$$

$$= \underbrace{R I_{RM}}_{V_{RM}} sen(\omega t + \alpha_i) = R\sqrt{2} I_R sen(\omega t + \alpha_i) \triangleq \sqrt{2} V_R sen(\omega t + \alpha_v) \quad \begin{cases} \alpha_i = \alpha_v \ \to v_R\ e\ i_R\ in\ fase \\ \sim \\ V_R \triangleq R I_R \ \ (val.eff.) \end{cases}$$

$$\angle \bar{I}_R = \alpha_i \quad \angle \bar{V}_R = \alpha_v \quad [\bar{I}_R] = I_R \quad [\bar{V}_R] = R|\bar{I}_R|$$

quindi la legge di Ohm può cosi essere espressa (*prodotto per una costante* $R \in \mathbb{R}^+$):

$$\boxed{\bar{V}_R = R\bar{I}_R} \qquad \boxed{R \in \mathbb{R}^+}$$

INDUTTORE

Data la corrente su L:

$$i_L(t) = I_{LM} sen(\omega t + \alpha_i) = \sqrt{2} I_L sen(\omega t + \alpha_i) \quad I_{LM} = corrente \max su\ L \quad I_L = corr.eff.\ su\ L$$

La tensione risulta:

$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} \quad [L] = \left[\frac{V \cdot s}{A}\right] \triangleq [Henry] = [H]$$

$$= L\frac{d[I_{LM} sen(\omega t + \alpha_i)]}{dt} = \omega L I_{LM} \cos(\omega t + \alpha_i) = \omega L I_{LM} \operatorname{sen}\left(\omega t + \alpha_i + \frac{\pi}{2}\right) = \omega L I_{LM} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_v)$$

$$= \omega L \sqrt{2} I_L \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_v) \triangleq \sqrt{2} V_L \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_v) \quad \begin{cases} \alpha_i = \alpha_v - \dfrac{\pi}{2} \ \to \ i_L\ in\ rirardo\ di\ 90° \\ \sim \\ V_L \triangleq \omega L I_L \ \ (val.eff.) \end{cases}$$

$$\angle \bar{I}_L = \alpha_v - \frac{\pi}{2} \quad \angle \bar{V}_L = \alpha_v \quad [\bar{I}_L] = I_L \quad [\bar{V}_L] = \omega L|\bar{I}_L|$$

quindi la legge di Ohm può cosi essere espressa (*derivata*):

$$\boxed{\bar{V}_L = j\omega L \bar{I}_L \triangleq \dot{X}_L \bar{I}_L} \qquad \boxed{\dot{X}_L \triangleq j\omega L\ [\Omega] \in \mathbb{I}^+}$$ REATTANZA INDUTTIVA

$\dot{X}_L$ non dipende da t quindi è un operatore vettoriale. $\left[\frac{rad}{s} \cdot \frac{V \cdot s}{A}\right] = \left[\frac{V}{A}\right] = [\Omega]$

CONDENSATORE

Data la tensione su C:

$$v_C(t) = V_{CM} sen(\omega t + \alpha_v) = \sqrt{2} V_C sen(\omega t + \alpha_v) \quad V_{CM} = tesione \max su\ C \quad V_C = tens. eff.\ su\ C$$

La corrente risulta:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} \quad [C] = \left[\frac{A \cdot s}{V}\right] = \left[\frac{C}{V}\right] \triangleq [Farad] = [F]$$

$$= C \frac{d[V_{CM} sen(\omega t + \alpha_v)]}{dt} = \omega C V_{CM} \cos(\omega t + \alpha_v) = \omega C V_{CM} \operatorname{sen}\left(\omega t + \alpha_v + \frac{\pi}{2}\right) = \omega C V_{CM} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_i)$$

$$= \omega C \sqrt{2} V_C \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_i) \triangleq \sqrt{2} I_C \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_i) \quad \begin{cases} \alpha_i = \alpha_v + \dfrac{\pi}{2} \rightarrow i_C\ in\ anticipo\ di\ 90° \\ \sim \\ I_C \triangleq \omega C V_C \ \ (val. eff.) \end{cases}$$

$$\angle \bar{I}_C = \alpha_v + \frac{\pi}{2} \quad \angle \bar{V}_v = \alpha_v \quad |\bar{I}_C| = I_C \quad |\bar{V}_C| = \frac{|\bar{I}_C|}{\omega C}$$

quindi la legge di Ohm può cosi essere espressa (*derivata*):

$$\boxed{\bar{V}_C = \frac{1}{j\omega C} \bar{I}_C \triangleq \dot{X}_C \bar{I}_C} \qquad \boxed{\dot{X}_C \triangleq \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} [\Omega] \in \mathbb{I}^-}$$ REATTANZA CAPACITIVA

$\dot{X}_C$ non dipende da t quindi è un operatore vettoriale. $\left[\frac{s}{rad} \cdot \frac{V}{A \cdot s}\right] = \left[\frac{V}{A}\right] = [\Omega]$

IMPEDENZA

Se una rete presenta contemporaneamente R ed L e/o C, il legame tra $\bar{I}$ e $\bar{V}$ e sarà espresso da un operatore complesso $\dot{Z} \in \mathbb{C}$

Esempio: SERIE R, L, C

$$i(t) = \sqrt{2} I sen(\omega t + \alpha_i)$$

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

Con il metodo vettoriale

$$\bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C = R\bar{I} + j\omega L \bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I} = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]\bar{I}$$

$$\boxed{\bar{V} = \dot{Z}\bar{I}} \qquad \boxed{\dot{Z}_S \triangleq R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) [\Omega] \in \mathbb{C}}$$ IMPEDENZA (*della serie R, L, C*)

In generale

$$\dot{Z} = R + \dot{X} = R \pm jX \quad \begin{cases} \dot{Z}\ Impedenza\ \in \mathbb{C} \\ R\ Resistenza\ \in \mathbb{R}^+ \\ \dot{X}\ Reattanza\ \in \mathbb{I} \end{cases}$$

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = G + \dot{B} = G \pm jB \quad \begin{cases} \dot{Y}\ Amettenza\ \in \mathbb{C} \\ G\ Conduttanza\ \in \mathbb{R}^+ \\ \dot{B}\ Suscettanza\ \in \mathbb{I} \end{cases}$$